·现代数学丛书·

调和映照

忻元龙 著

上海科学技术出版社

Modern Mathematics Series

HARMONIC MAPS

Xin Yuanlong

Shanghai Scientific & Technical Publishers

·现代数学丛书·

调 和 映 照

忻元龙 著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所经销　　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092　小 1/16　印张 14.75　插页 4　字数 186,000

1995 年 6 月第 1 版　　1995 年 6 月第 1 次印刷

印数：1—1,200

ISBN 7-5323-3669-7/O·184

定价：23.20 元

(沪) 新登字 108 号

内 容 提 要

本书围绕调和映照理论中作者工作过的几个方面展开有关的理论，介绍这些方面的主要定理、方法和最新进展，并系统反映作者本人的研究成果。本书共分 6 章，第 1 章是引论，它是第 2 章至第 6 章的基础，也是调和映照理论的简捷入门；其中给出了调和映照的几种等价定义及有关几何背景、调和映照的重要公式和基本性质。为方便展开有关理论，一开始先介绍向量丛的初步知识。第 2 章至第 6 章依次为守恒律；调和映照和高斯映照；调和映照和全纯映照；存在性，不存在性和正则性；等变调和映照。本书供高等学校数学系高年级学生、研究生及有关的科研人员参考。

MAIN CONTENTS

The monograph is restricted to some topics in the theory of harmonic maps. We introduce the main theorems, show the basic techniques and describe the author's contributions in those topics. In such a way the contents of Chapter 2~6 are organized. The first chapter is an introductory material, which is not only the base of the later chapters, but also a brief approach to the theory. Among them are several equivalent definitions of harmonic maps, basic formulas and main properties on harmonic maps. For fixing notations and terminologies the chapter begins with elementary knowledge on the vector bundles. Following chapters are conservation law, harmonic maps and Gauss maps, harmonic maps and holomorphic maps, existence, nonexistence and regularity, equivariant harmonic maps. The book may be served as a reference book for graduate students, senior undergraduate students and related scientists.

出版说明

从60年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著并已在国外出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价。原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋3位教授虽已先后逝世，但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念。由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿。

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作。充实编委会的力量。考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于1990年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨。

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编，18位著名数学家任委员。编委会负责推荐（或审定）选题和作者，主持书稿的审核等工作。

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流。

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著。

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社

1991年4月

序　言

调和映照是微分几何中测地线、极小子流形、调和函数概念的自然推广．它与多复变函数论中的全纯映照、随机过程理论、材料科学中的液晶理论以及理论物理中的非线性场论密切相关．近二十多年来，调和映照理论获得了迅速的发展，它是当前数学中主流方向的课题之一．

本书围绕调和映照理论中作者工作过的几个方面展开有关的理论，介绍这些方面的主要定理、方法，并反映作者本人的研究成果．本书后5章的内容就是这样组成的．第1章引论，它是后5章的基础，也是调和映照理论的简捷入门．限于篇幅，对Riemann几何中熟知的事实往往不加说明地引用．它们在一般Riemann几何书中都能找到，如伍鸿熙等人著的“黎曼几何初步”是很好的参考书．限于作者的学术水平，书中难免有不少欠妥甚至错误之处，恳请读者批评指正．

本书的很多内容曾在复旦大学数学研究所对研究生讲授过多次，并在中国科学院数学研究所，在中国科学技术大学举办的全国研究生暑期教学中心等作过系列演讲．因此，本书也是这些讲稿的自然发展．本书写作过程中得到国家自然科学基金（特别是天元基金）和国家教委博士点基金的资助，在此一并致谢．

最后，特别感谢谷超豪教授和胡和生教授在本书写作过程中所给予的热情鼓励和支持．

忻元龙

1993年7月

目　　录

CONTENTS

第 1 章

引　论

调和映照的几个等价定义、有关的几何背景、它们之间的相互关系，以及调和映照的一些基本性质和基本公式是本章的内容。本章是以后各章的基础，也是进一步研究调和映照的基础，为了方便叙述和交待有关的记号，我们从介绍向量丛开始。

§1.1　向　量　丛

向量丛是现代数学的一个基本概念。它不仅有助于了解调和映照，也有助于了解其它几何问题，本节只介绍向量丛的初步知识。

1.1.1　向量丛

向量丛是一种特殊的纤维丛。下面，采用直接的方法来定义。

定义 1.1　设 ξ 和 M 都是微分流形，$\pi:\xi\to M$ 是可微满映照，且满足下列条件：

1) 对任何 $p\in M$，$\pi^{-1}(p)$ 中有向量空间结构（有时记为 $F_p(E)$ 或 F_p，它的维数以后总假定为常数）；

2) 局部平凡性，即对任何 $p\in M$，存在邻域 $p\in U\subset M$，和微分同胚

$$h:U\times R^n\to\pi^{-1}(U),$$

使对任何 $q\in U$，映照 $y\mapsto h(q,y)$ 是向量空间 R^n 和 $\pi^{-1}(q)$ 间的线性同构。这就得到向量丛 $E(\xi, M, \pi)$。

我们称 ξ 为全流形，M 为底流形，π 为投影映照，$\pi^{-1}(p)$ 为 p

上的纤维，(U, h)为ξ的局部坐标系。这里U可以是整个底流形，这时，E称为平凡向量丛。

定义1.2 设$s: M\to\xi$是向量丛E的底流形到全流形的可微映照，如果它还满足

$$\pi\circ s = id \text{(恒等映照)},$$

那末，称s是一个截面，截面的全体记为$\Gamma(E)$。

例1 设R^n表示n维实向量空间。它和任何微分流形M作乘积，得到平凡向量丛$M\times R^n$。对它的任何一元素$(p, x)\in M\times R^n$，投影映照定义为$\pi(p, x)=p$。对任何$t_1, t_2\in R$，由

$$t(p, x_1)+t_2(p, x_2)=(p, t_1x_1+t_2x_2)$$

决定纤维$\pi^{-1}(p)$上的向量空间结构。当$n=1$时，$M\times R$的任一截面就是M上的光滑函数。

例2 微分流形M的切丛TM。

首先，$TM=\bigcup_{p\in M}T_pM$，其中T_pM表示M在p点的切空间，构成一个微分流形。对任何$(p, v)\in TM$，投影映照π由$\pi(p, v)=p$所定义。$\pi^{-1}(p)$中的向量空间结构由

$$t_1(p, v_1)+t_2(p, v_2)=(p, t_1v_1+t_2v_2)$$

所决定。

下面来说明其局部平凡性。

对任一点$p\in M$，存在坐标邻域$p\in U\subset M$和坐标映照$\varphi(U)=(x^1, \cdots, x^n)\subset R^n$（其中$n$为流形$M$的维数）。设$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$是$p$点第$i$坐标曲线切向量，那么定义$h: U\times R^n\to\pi^{-1}(U)$如下：

$$h(p, v)=v^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,$$

其中$v=(v^1, \cdots, v^n)$。反过来，对任何$e\in\pi^{-1}(U)$，令

$$p'=\pi(e)\in U,$$

那末

$$e=e^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{p'},$$

我们有

$$h^{-1}(e)=(\pi(e),\ (e^1,\ \cdots,\ e^n)).$$

这说明 h 是微分同胚。

因此 TM 构成M上的向量丛，称之为*切丛*。切丛上的截面就是流形M上的光滑向量场。

例 3 *诱导向量丛*。设 $\pi: \xi\to N$ 是向量丛E，M 为另一微分流形。设 $f: M\to N$ 是光滑映照。我们来构造M上的诱导向量丛 $E_1=f^{-1}E$。

1) 全流形 ξ_1 为由$(p,\ e)$组成的 $M\times\xi$ 中满足下列条件的子集

$$f(p)=\pi(e);$$

2) 投影映照 π_1: $\xi_1\to M$ 被 $\pi_1(p,\ e)=p$ 所定义。若定义 $\hat{f}(p,\ e)=e$，那末有下列交换图

$$\begin{array}{ccc} \xi_1 & \xrightarrow{\ \hat{f}\ } & \xi \\ \pi_1\big\downarrow & & \big\downarrow\pi \\ M & \xrightarrow{\ f\ } & N; \end{array}$$

3) $\pi_1^{-1}(p)$上的向量空间结构

对 ξ_1 的同一纤维上的二点$(p,\ e_1)$和$(p,\ e_2)$，因为 $\pi(e_1)=f(p)=\pi(e_2)$，即 e_1 和 e_2 是 ξ 的同一纤维上的二点，它们作为 ξ 纤维上的二点可作线性运算。这样，我们可以定义 ξ_1 同一纤维上的向量空间结构为

$$t_1(p,\ e_1)+t_2(p,\ e_2)=(p,\ t_1e_1+t_2e_2).$$

可以说明 $F_p(f^{-1}E)$ 和 $F_{f(p)}(E)$ 是同构的。事实上，从 $\pi(t_1e_1+t_2e_2)=f(p)$ 知

$$\begin{aligned}\hat{f}(t_1(p,\ e_1)+t_2(p,\ e_2))&=\hat{f}(p,\ t_1e_1+t_2e_2)\\&=t_1e_1+t_2e_2\\&=t_1\hat{f}(p,\ e_1)+t_2\hat{f}(p,\ e_2).\end{aligned}$$

所以，$\hat{f}$ 是 $F_p(f^{-1}E)$ 到 $F_{f(p)}(E)$ 中的线性映照。它显然是满映照，并且对任何 $e\in\xi$，它在 $\hat{f}$ 下的原象如果是$(p,\ e)$ 和 $(q,\ e)$，当考虑 $\pi^{-1}(p)$上点时必有 $p=q$。这说明 $\hat{f}$ 还是单映照。因此

$F_p(f^{-1}E)$和$F_{f(p)}(E)$是线性同构的。

4) 局部平凡性

对任一点$p\in M$，有$f(p)\in N$。设(U, h) 是E的局部坐标系。令$U_1=f^{-1}(U)$，不妨设U_1是p在M上的一个坐标邻域。那末，定义$h_1: U_1\times R^n\to\pi_1^{-1}(U_1)$如下：

$$h_1(p, v)=(p, h(f(p), v))\in M\times\pi^{-1}(U)\subset M\times\xi,$$

它满足条件

$$f(p)=\pi\circ h(f(p), v)),$$

所以

$$h_1(p, v)\subset\pi_1^{-1}(U_1)\subset\xi_1.$$

h_1是微分同胚。事实上，它存在可微逆映照。设$e_1\in\pi_1^{-1}(U_1)$，那末$e_1=(p, e)\in M\times\xi$，并满足$f(p)=\pi(e)$。如果

$$h^{-1}(e)=(f(p), v),$$

其中$v\in R^n$，那末可定义

$$h_1^{-1}(e_1)=(p, v).$$

显然

$$\begin{aligned}h_1\circ h_1^{-1}(e_1)&=h_1(p, v)=(p, h(f(p), v))\\&=(p, h\circ h^{-1}(e))\\&=(p, e)=e_1,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}h_1^{-1}\circ h_1(p, v)&=h_1^{-1}(p, h(f(p), v))\\&=(p, v).\end{aligned}$$

这就说明了$h_1: U_1\times R^n\to\pi_1^{-1}(U_1)$是微分同胚。从而，$(U_1, h_1)$是$\xi_1$的局部坐标系。

这就定义了诱导向量丛$\pi_1: \xi_1\to M$，记为$f^{-1}E$。

特别地，从可微映照$f: M\to N$，可得到向量丛$f^{-1}TN$。它对研究映照f的性质有很大的重要性。

例4 设$f: M\to N$是Riemann流形的等距浸入。对任何$p\in M$，考虑(p, v)的集合，其中v是正交于p点M的切空间N在中点的切向量，它构成法丛NM。不难说明，它构成向量丛，留给读者自行验证。

我们知道，从已知的向量空间可以作出各种各样新的向量空间。设V和W是向量空间，$\mathrm{Hom}(V, W)$表示从V到W的线性变换全体；$V\otimes W$表示V和W的张量积；$V\odot W$表示对称张量积。还有，从$V\times V$到W的所有对称双线性变换全体、V的对偶空间$V^*=\mathrm{Hom}(V, R)$、V的k次外积$\Lambda^k V$等等。相应地，对同一底流形M上的向量丛$E_1, \cdots, E_k$的每点纤维$F_p(E_1), \cdots, F_p(E_k)$，以上述任一方式得到新的向量空间，记为$F_p$。定义全流形$E$为向量空间$F_p$的不相交和：

$$E=\bigcup_{p\in M}F_p$$

和投影映照$\pi: E\to M$为$\pi(F_p)=p$，那么在E上存在拓扑结构和微分结构，使E成为全流形而构成向量丛。具体证明请参阅有关书籍，如文献[78]和[114]。

微分几何中的很多量可看作相应向量丛的截面。如微分流形M上的光滑向量场就是切丛TM的截面。TM的对偶丛称为余切丛TM^*，它的截面就是普通的一次微分形式。而任何一个k次微分形式ω，就是$\Lambda^k TM^*$的截面。更一般地，可考虑向量值微分形式，它同样是一种截面。又如，对等距浸入$f: M\to N$，它的第二基本形式，可看作向量丛$\mathrm{Hom}(TM\odot TM, NM)$的截面。

1.1.2 联络

为了讨论向量丛的几何性质，我们要引进联络的概念。

设M是 Riemann 流形，$\pi: E\to M$是向量丛。

定义 1.3 向量丛E上的联络是一个满足下列条件的映照∇：$\Gamma(TM)\times\Gamma(E)\to\Gamma(E)$（对$X\in\Gamma(TM)$，$\phi\in\Gamma(E)$，记$(X, \phi)$在$\nabla$下的象为$\nabla_X\phi$）：

1) $\nabla_{fX}\phi=f\nabla_X\phi$；

2) $\nabla_{X+Y}\phi=\nabla_X\phi+\nabla_Y\phi$；

3) $\nabla_X(\phi+\psi)=\nabla_X\phi+\nabla_X\psi$；

4) $\nabla_X(f\phi)=X(f)\phi+f\nabla_X\phi$。

这里$X, Y\in\Gamma(TM)$，ϕ，$\psi\in\Gamma(E)$，f是M上的函数，即$f\in\Gamma(M\times R)$。

注　对任何一点 $p\in M$，$\nabla_X\phi$ 在 p 点的值仅依赖于向量 X_p 与 ϕ 沿 M 上过 p 并且与 X_p 相切的任一曲线 γ 上的值，即，如果，$\widetilde{X}\in\Gamma(TM)$ 并且 $\widetilde{X}_p=X_p$，那么，$(\nabla_{\widetilde{X}}\phi)_p=(\nabla_X\phi)_p$。又如果对 $\widetilde{\phi}\in\Gamma(E)$，并且 $\phi|_\gamma=\widetilde{\phi}|_\gamma$，那么，我们也有 $(\nabla_X\phi)_p=(\nabla_{\widetilde{X}}\phi)_p$。

有了联络，就可以按如下方式定义曲率。对任何 X，$Y\in\Gamma(TM)$ 和 $\phi\in\Gamma(E)$，

$$R(X,\ Y)\phi\stackrel{\text{def}}{=\!=}-\nabla_X\nabla_Y\phi+\nabla_Y\nabla_X\phi+\nabla_{[X,Y]}\phi \tag{1.1}$$

它可以看作为 $\Gamma(\Lambda^2TM)\times\Gamma(E)$ 到 $\Gamma(E)$ 的映照，并且容易验证它关于 X，Y 及 ϕ 都是 $\Gamma(M\times R)$ 线性的。

注　这里必须注意曲率定义的符号习惯，不同的作者往往采用不同的符号。这里的符号和古典曲率张量的符号是一致的。

设 $E_1\to M$ 和 $E_2\to M$ 是底流形 M 上的二个向量丛。从 E_i 上的联络 ∇^{E_i} 可以诱导出各种诱导向量丛上的联络。

1)　直和的联络

$$\nabla_X(\phi_1\oplus\phi_2)\stackrel{\text{def}}{=\!=}\nabla^{E_1}_X\phi_1\oplus\nabla^{E_2}_X\phi_2, \tag{1.2}$$

2)　张量积的联络

$$\nabla_X(\phi_1\otimes\phi_2)\stackrel{\text{def}}{=\!=}(\nabla^{E_1}_X\phi_1)\otimes\phi_2+\phi_1\otimes(\nabla^{E_2}_X\phi_2), \tag{1.3}$$

其中 $X\in\Gamma(TM)$，$\phi_1\in\Gamma(E_1)$ 及 $\phi_2\in\Gamma(E_2)$。

3)　对偶丛的联络

设 $X\in\Gamma(TM)$，$\phi\in\Gamma(E)$ 以及 $\psi^*\in\Gamma(E^*)$，那末

$$(\nabla^{E^*}_X\psi^*)\phi\stackrel{\text{def}}{=\!=}X(\psi^*(\phi))-\psi^*(\nabla_X\phi), \tag{1.4}$$

4)　线性变换丛的联络

设 $\mathscr{A}\in\Gamma(\mathrm{Hom}(E_1,\ E_2))$，$\phi_1\in\Gamma(E_1)$ 和 $X\in\Gamma(TM)$，那末

$$(\nabla_X\mathscr{A})\phi_1\stackrel{\text{def}}{=\!=}\nabla^{E_2}_X(\mathscr{A}\phi_1)-\mathscr{A}(\nabla^{E_1}_X\phi_1). \tag{1.5}$$

从上面这些例子中可以看出，从原有丛上的联络可以得到各种各样诱导丛上的联络，它类似"导数"，并且与张量的缩并是可以交换的。

下面来讨论 Riemann 向量丛。

从向量丛 $E\to M$ 出发，可得到它对偶丛的二阶对称张量积丛

$\odot^2E^*$. 它的任一截面 $a\in\Gamma(\odot^2E^*)$, 如果在M的每一点是正定的，它就定义了向量从E上的一个度量。任一具有联络∇和度量a的向量丛E，如果a在诱导的联络下是平行的，即$\nabla_X a=0$，那末，(E,∇,a) 就构成 Riemann 向量丛。设ϕ，$\psi\in\Gamma(E)$ 以及 $X\in\Gamma(TM)$，记$a(\phi,\psi)=\langle\phi,\psi\rangle$，那末

$$(\nabla_X a)(\phi,\psi)=X\langle\phi,\psi\rangle-\langle\nabla_X\phi,\psi\rangle-\langle\phi,\nabla_X\psi\rangle,$$

所以$\nabla_X a=0$等价于

$$X\langle\phi,\psi\rangle=\langle\nabla_X\phi,\psi\rangle+\langle\phi,\nabla_X\psi\rangle. \tag{1.6}$$

从已知的 Riemann 向量丛，可按自然的方法诱导出它对偶丛上的度量，以及各种各样诱导丛上的度量，这些度量关于所讨论过的诱导联络恰好构成 Riemann 向量丛。

M上最基本的向量丛是切丛。根据 Riemann 几何基本定理，其上存在唯一的 Levi-Civita 联络，它除了满足 Riemann 联络的条件外，还满足无挠的条件。切丛 TM 关于 Levi-Civita 联络的曲率就是普通的 Riemann 曲率。

同样，我们可以定义 Hom $(E_1,\ E_2)$ 丛上的度量。设$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}\in\Gamma(\mathrm{Hom}(E_1,E_2))$

$$\langle\mathscr{A},\mathscr{B}\rangle_m\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\langle\mathscr{A}(\xi_i),\mathscr{B}(\xi_i)\rangle_m, \tag{1.7}$$

其中$m\in M$，$\{\xi_i\}$是$\pi_{E_1}^{-1}(m)$上的幺正基。显然，上述定义与基的选取是无关的。不难验证，度量(1.7)关于联络(1.5)必满足Riemann向量丛的条件(1.6)。

最后，我们利用所描述的方式来定义向量丛截面上的重要微分算子，迹—Laplace 算子。

设 $X\in\Gamma(TM)$和 $\psi\in\Gamma(E)$。在 Hom(TM,E) 上有一个截面 $\nabla\psi$ 定义如下

$$\nabla\psi(X)\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\nabla_X^E\psi.$$

再利用 Hom(TM,E)上的诱导联络，对 X，$Y\in\Gamma(TM)$，定义 $\nabla_{X,Y}\psi\in\Gamma(E)$为

$$
\begin{aligned}
\nabla_{X,Y}\psi &\stackrel{\text{def}}{=} (\nabla_X(\nabla\psi))(Y) \\
&= \nabla_X^E((\nabla\psi)Y) - \nabla\psi(\nabla_X Y) \\
&= \nabla_X^E\nabla_Y^E\psi - \nabla_{\nabla_X Y}^E\psi, \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

显然$(X(p), Y(p)) \to \nabla_{X,Y}\psi(p)$是$T_pM$上$E_p$值的双线性映照，取它的迹就得到$\nabla^2\psi(p)$；从而，定义了$E$上新的截面。算子$\nabla^2$就称为迹—Laplace算子。

命题1.4 如果底流形M是紧致定向的Riemann流形，那末∇^2关于E上截面的整体内积是负半定的自共轭微分算子。

证明 对任何$p\in M$，取p点附近的局部幺正标架场$\{e_i\}$，使$\nabla_{e_i}e_j|_p=0$（本书有时简称为局部幺正法标架场）。那末，对ϕ，$\psi\in\Gamma(E)$，在p点有

$$
\begin{aligned}
\langle\nabla^2\psi, \phi\rangle &= \langle\nabla_{e_i}^E\nabla_{e_i}^E\psi, \phi\rangle \\
&= e_i\langle\nabla_{e_i}^E\psi, \phi\rangle - \langle\nabla_{e_i}^E\phi, \nabla_{e_i}^E\psi\rangle \\
&= e_i\langle\nabla_{e_i}^E\psi, \phi\rangle - \langle\nabla\phi, \nabla\psi\rangle. \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

令

$$v = \langle\nabla_{e_i}^E\psi, \phi\rangle e_i,$$

显然v是M上整体定义的向量场，并且有

$$\operatorname{div}v = \langle\nabla_{e_j}v, e_j\rangle = e_i(\langle\nabla_{e_i}^E\psi, \phi\rangle). \qquad (1.13)$$

将(1.12)式代入(1.13)式，并且积分，得到

$$\int_M\langle\nabla^2\psi, \phi\rangle*1 = \int_M\operatorname{div}v*1 - \int_M\langle\nabla\phi, \nabla\psi\rangle*1, \qquad (1.14)$$

其中$*1$表示M上的体积元（本书以后都这样表示）。由Green定理，(1.14)式变成

$$\int_M\langle\nabla^2\psi, \phi\rangle*1 = -\int_M\langle\nabla\phi, \nabla\psi\rangle*1. \qquad (1.15)$$

同样可得

$$\int_M\langle\nabla^2\phi, \psi\rangle*1 = -\int_M\langle\nabla\psi, \nabla\phi\rangle*1. \qquad (1.16)$$

因此

$$\int_M\langle\nabla^2\psi, \phi\rangle*1 = \int_M\langle\psi, \nabla^2\phi\rangle*1. \qquad (1.17)$$

这就证明了迹—Laplace算子的自共轭性和负半定性。

进一步，可以验证迹—Laplace算子是椭圆算子。

注　对平凡丛$M\times R$，可定义自然联络如下：设$X\in\Gamma(TM)$，$\phi\in\Gamma(M\times R)$，

$$\nabla_X\phi\overset{\text{def}}{=\!=}X(\phi) \tag{1.18}$$

那末，由此出发，在$M\times R$的截面上定义的迹—Laplace算子就是关于流形M上光滑函数的普通Laplace算子。

取M上的局部坐标系(x^i)，$\frac{\partial}{\partial x^i}$表示第$i$坐标曲线的切向量。度量张量为

$$g_{ij}=\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle,$$

它的逆阵记为(g^{ij})。在相应的Levi-Civita联络下，

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k},$$

其中Γ^k_{ij}表示克氏记号。那末，从(1.8)式和(1.18)式立即得到将迹—Laplace算子作用在M上光滑函数的局部表达式

$$\nabla^2\phi=g^{ij}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}-\Gamma^k_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right). \tag{1.19}$$

它和M上光滑函数在普通Laplace算子作用下的局部表达式是一样的。以后用Δ_M表示流形M上的Laplace算子。

§1.2 调和映照

调和映照有几个等价的定义。我们来考察这些定义的几何背景以及它们之间的相互关系。

1.2.1 能量

设M和N分别是m和n维的Riemann流形，$\langle,\rangle_M$和$\langle,\rangle_N$表示M和N上的Riemann度量。有时，为了方便起见，在不引起误解的情况下，略去这些内积记号的下标M以及N等等。它们对应的Levi-Civita联络分别记为∇和$\overline{\nabla}$。

设$f:M\to N$是光滑映照。它诱导了对应切丛之间的映照

$f_*: TM \to TN$；同时还有M上的诱导向量丛$E = f^{-1}TN$。

我们可以从N上的 Levi-Civita 联络$\overline{\nabla}$得到向量丛$f^{-1}TN$上的诱导联络$\tilde{\nabla}$如下：对于任何$X \in \Gamma(TM)$和$s \in \Gamma(f^{-1}TN)$，记$s = a_\alpha e_\alpha \circ f$，其中$a_\alpha$是$M$上的光滑函数$\{e_\alpha\}(\alpha = 1, \cdots)$是$N$上的局部幺正标架场，我们定义

$$\tilde{\nabla}_X s \stackrel{\text{def}}{=} (da_\alpha(X))\, e_\alpha \circ f + a_\alpha (\overline{\nabla}_{f_* X} e_\alpha) \circ f. \tag{1.20}$$

上述s实际上是沿着f的N上的向量场。因此$f^{-1}TN$有从N上继承的 Riemann 度量。不难验证，E的诱导联络$\tilde{\nabla}$和所继承的 Riemann 度量满足 Riemann 向量丛的条件。

设$(g_1)h$分别是M, N上的度量张量。利用f将h拉到M上得到M上的二阶对称半正定张量f^*h，它称为映照f的第一基本形式。它是向量丛$TM^* \odot TM^*$上的一个截面。对任何$X, Y \in \Gamma(TM)$，

$$f^*h(X, Y) = h(f_*X, f_*Y) = \langle f_*X, f_*Y \rangle_N. \tag{1.21}$$

关于M的度量张量g，取f^*h的迹的一半就得到映照f的能量密度

$$e(f) = \frac{1}{2} \langle f_* e_i, f_* e_i \rangle_N, \tag{1.22}$$

其中$\{e_i\}(i = 1, \cdots, m)$是$M$上的局部幺正标架场。将能量密度在整个流形$M$上积分就得到映照$f$的能量：

$$E(f) = \frac{1}{2} \int_M \langle f_* e_i, f_* e_i \rangle * 1. \tag{1.23}$$

它可以是无限的，但当M为紧致流形时，能量一定是有限的。

如果我们取M, N在映照f对应点附近的局部坐标为(x^i)和(y^α)。对应点的坐标曲线切向为$\frac{\partial}{\partial x^i}$和$\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$。那末

$$\begin{aligned} e(f) &= \frac{1}{2} g^{ij} \langle f_* \frac{\partial}{\partial x^i}, f_* \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle_N \\ &= \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} h_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

其中g_{ij}及$h_{\alpha\beta}$分别为M和N上的度量张量在局部坐标下的分

量。因此，在局部坐标下的能量表达式为

$$E(f)=\frac{1}{2}\int_M g^{ij}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}h_{\alpha\beta}*1. \tag{1.24}$$

设 ϕ 是M到自身的微分同胚，并满足 $\phi^*g=\lambda^2 g$，其中 g 是 M 上的 Riemann 度量，λ 是M上的光滑函数。ϕ 称为M上的共形微分同胚(当 λ 为常数时，ϕ 称为相似映照)。从(1.24)式显然可见

$$E(f\circ\phi)=\int_M \lambda^{2-m}e(f)*1.$$

这说明，当M的维数 $m=2$ 时，能量积分是共形不变的。

注 如果映照 f 的能量密度处处为零，那末，f 是常值映照，即象 $f(M)$ 只由一点组成。

1.2.2 张力场

我们首先引进映照 f 的第二基本形式。

设 $X, Y\in\Gamma(TM)$，利用 f，可得到 $f^{-1}TN$ 值的一次微分形式 df 如下：

$$df(X)\stackrel{\text{def}}{=\!=}f_*X,$$

即 $df\in\Gamma(T^*M\otimes f^{-1}TN)$。因此有 $\nabla_X df\in\Gamma(T^*M\otimes f^{-1}TN)$，这里 ∇ 表示向量丛 $T^*M\otimes f^{-1}TN$ 上的诱导联络。今后如不发生混淆，用同一个记号 ∇ 表示不同向量丛上的联络，意义一般可从上下文自明。

定义映照 f 的第二基本形式为

$$B_{XY}(f)\stackrel{\text{def}}{=\!=}(\nabla_X df)(Y)\in\Gamma(f^{-1}TN). \tag{1.25}$$

从定义不难看出 B_{XY} 关于 X, Y 是函数线性的，即对任何M上的光滑函数 λ，有

$$B_{\lambda XY}=B_{X\lambda Y}=\lambda B_{XY}.$$

我们取在映照 f 下任一对应点附近的局部坐标(x^i)和(y^α)并记

$$X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y=Y^j\frac{\partial}{\partial x^j},$$

而

$$B_{\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}}=(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}df)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$
\begin{aligned}
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} f_* \frac{\partial}{\partial x^j} - f_* \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right) - f_* \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^i} \bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \\
&\quad - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}.
\end{aligned} \tag{1.26}
$$

其中 Γ^k_{ij} 是M上的克氏记号,$\bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$ 是N上的克氏记号。从克氏记号关于下标的对称性立即得到 $B_{\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}}$ 关于 i, j 是对称的,因此B_{XY}关于 X, Y 是对称的,即

$$B(f) \in \Gamma(\mathrm{Hom}(TM \odot TM,\ f^{-1}TN)).$$

定义 1.5 对光滑映照 $f: M \to N$, 如果 $B(f) \equiv 0$, 那末f称为全测地映照。

全测地映照的几何意义是它将M上的测地线映照到N上的测地线,并且使沿着测地线的弧长成比例。为了说明这一点,考虑M上任一以弧长为参数的测地线$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$。它在映照$f$下得到$N$上的曲线$f \circ \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$。注意到

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}} \frac{d(f\circ\gamma)}{dt} &= \nabla_{f_* \frac{d\gamma}{dt}} f_* \frac{d\gamma}{dt} \\
&= \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} f_* \frac{d\gamma}{dt} \\
&= (\tilde{\nabla}_{\frac{d\gamma}{dt}} df) \frac{d\gamma}{dt} + f_* \left(\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} \right) \\
&= B_{\frac{d\gamma}{dt}\frac{d\gamma}{dt}}(f),
\end{aligned}
$$

立即得到所要的几何解释。

取第二基本形式 $B_{XY}(f)$ 的迹就得到张力场

$$\tau(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} B_{e_i e_i}(f) = (\nabla_{e_i} df)(e_i) \tag{1.27}$$

它是 $f^{-1}TN$ 的一个截面。

定义 1.6 对光滑映照 $f: M \to N$, 如果 $\tau(f) \equiv 0$, 那末f称为调和映照。

下面来推导张力场的局部表达式。设 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ 为映照 f 下任一对应点的坐标曲线切向量。从(1.26)式立即得到

$$\begin{aligned}\tau(f) &= g^{ij}B_{\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}}\\ &= g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} + \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\\ &= \left(\Delta_M f^\alpha + g^{ij}\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^\alpha},\end{aligned} \tag{1.28}$$

其中 Δ_M 表示流形 M 上的 Laplace 算子。这样，我们得到了调和映照在局部坐标系下的偏微分方程

$$\Delta_M f^\alpha + g^{ij}\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^j} = 0. \tag{1.29}$$

这是一个拟线性的椭圆型的二阶方程组。调和映照的存在性问题就是上述方程组在整个流形上的大范围解的存在性问题。

1.2.3 第一变分公式

张力场和能量之间的关系由第一变分公式所描述。设 $v\in\Gamma(f^{-1}TN)$，它也可看成沿着 f 的 N 上的向量场。据此可以得到单参数映照族 f_t，使 $f_0=f$，$\left.\frac{df_t}{dt}\right|_{t=0}=v$。$f_t$ 也可看作为 $M\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to N$ 的映照。取 M 上的局部幺正标架场 e_i，使 $\nabla_{e_i}e_j|_p=0$。显然有

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}e_i = \nabla_{e_i}\frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

我们来考察映照族 f_t 的能量变化。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(f_t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_M \langle f_{t*}e_i, f_{t*}e_i\rangle *1\\ &= \int_M \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} f_{t*}e_i, f_{t*}e_i\rangle *1.\end{aligned} \tag{1.30}$$

在整个 M 上定义向量场 W_t，它的局部表达式为

$$W_t = \langle \frac{df_t}{dt}, f_{t*}e_j\rangle e_j.$$

它的散度为

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} W_t &= \langle \nabla_{e_i}\left(\langle \frac{df_t}{dt}, f_{t*}e_j\rangle e_j\right), e_i\rangle \\
&= \langle \nabla_{e_i} df_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), f_{t*}e_i\rangle + \langle \frac{df_t}{dt}, (\nabla_{e_i} df_t)e_i\rangle \\
&= \langle (\nabla_{e_i} df_t)\frac{\partial}{\partial t}, f_{t*}e_i\rangle + \langle \frac{df_t}{dt}, \tau(f_t)\rangle \\
&= \langle (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} df_t)e_i, f_{t*}e_i\rangle + \langle \frac{df_t}{dt}, \tau(f_t)\rangle \\
&= \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} f_{t*}e_i, f_{t*}e_i\rangle + \langle \frac{df_t}{dt}, \tau(f_t)\rangle. \qquad (1.31)
\end{aligned}
$$

如果 v 的支集为紧，则对固定的 t，W_t 的支集为紧。根据 Green 定理

$$\int_M \operatorname{div} W_t * 1 = 0.$$

将(1.31)式二边积分，代入(1.30)式就得到

$$\frac{d}{dt} E(f_t) = -\int_M \langle \frac{df_t}{dt}, \tau(f_t)\rangle * 1. \qquad (1.32)$$

这样，我们就得到第一变分公式

$$\frac{d}{dt} E(f_t)\Big|_{t=0} = -\int_M \langle v, \tau(f)\rangle * 1. \qquad (1.33)$$

从第一变分公式，立即知道，调和映照就是能量积分的临界点，$\tau(f)=0$ 即能量积分的欧拉-拉格朗日方程。

注 如果 $\partial M \neq \phi$ 并且 $v|_{\partial M} \neq 0$，那末

$$\int_M \operatorname{div} W_t * 1 = \int_{\partial M} i_{W_t}(*1), \qquad (1.34)$$

其中 $i_{W_t}(*1)$ 表示体积元 $*1$ 和 W_t 的内积。如果，我们取 $e_1, \cdots, e_{m-1} \in T(\partial M)$，而 e_m 为 ∂M 的法向，$\{\omega_1, \cdots, \omega_m\}$ 为其对偶标架场。那末 $*1_M = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m$，并且

$$
\begin{aligned}
i_{W_t}(*1) &= \langle \frac{df_t}{dt}, f_{t*}e_j\rangle (-1)^{j-1}\omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_j \wedge \cdots \wedge \omega_m \\
&= \langle \frac{df_t}{dt}, f_{t*}e_m\rangle *1_{\partial M} + (\text{包含 } \omega_m \text{ 的项}),
\end{aligned}
$$

所以

$$\frac{d}{dt}E(f_t)=\int_{\partial M}\langle\frac{df_t}{dt},\ f_{t*}e_n\rangle*1-\int_M\langle\frac{df_t}{dt},\ \tau(f_t)\rangle*1.$$

1.2.4 调和映照实例

从前面的讨论已表明调和映照是一类很自然的变分问题的解。从下面实例中可以看出，它与数学中很多重要的概念和研究对象有着自然的内在联系。

例 5 如果 $N=R$，象流形为实数，那末方程(1.29)化为

$$\Delta_M f=0,$$

即 f 就是流形 M 上的调和函数。

例 6 如果出发流形是线段，$M=[0,1]$，那末方程(1.29)化为

$$\frac{d^2f^\alpha}{dt^2}+\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{df^\beta}{dt}\frac{df^\gamma}{dt}=0,$$

即 N 上的测地线微分方程。因此，调和映照是测地线概念的推广。

例 7 如果 $f: M\to N$ 是等距浸入，那么 f 是调和映照的充要条件为 f 是极小浸入。

设 $X, Y\in\Gamma(TM)$。首先，注意到 M 和 N 中的Levi-Civita联络有关系

$$f_*(\nabla_XY)=(\nabla_{f_*X}f_*Y)^T,$$

其中$(\ \ )^T$ 表示沿 f 的向量场在 $f(M)$ 切向的投影。那末映照 f 的第二基本形式

$$\begin{aligned}B_{XY}(f)&=(\nabla_Xdf)(Y)=\nabla_{f_*X}f_*Y-f_*(\nabla_XY)\\&=\nabla_{f_*X}f_*Y-(\nabla_{f_*X}f_*Y)^T=(\nabla_{f_*X}f_*Y)^N\end{aligned}$$

就是等距浸入 f 下，M 作为 N 子流形的第二基本形式。因此 M 在 N 中的平均曲率向量

$$H=\frac{1}{m}\tau(f).$$

这说明当 f 为等距浸入时，平均曲率为零和张力场为零是一样的。

例 8 设 G_1 和 G_2 是具双不变 Riemann 度量的李群，$f: G_1$

$\to G_2$ 是李同态，那么 f 是调和映照。

事实上，我们只要说明在恒等元处张力场为零即可。设 $e_1\in G_1$，$e_2\in G_2$ 为恒等元。取 e_1 附近的法坐标和 e_2 附近的法坐标。这样，可用 G_1 对应李代数 $\mathscr{T}_1$ 的坐标表示 e_1 近旁的点，同样，可用 $\mathscr{T}_2$ 的坐标表示 e_2 近旁的点。而 $f_*:\mathscr{T}_1\to\mathscr{T}_2$ 是线性变换，且保持李括号不变。这说明在法坐标下 f 表示为线性函数。另一方面，在法坐标原点，克氏记号为零。这样，从(1.28)式即得

$$\tau(f)|_{e_1}=0.$$

例 9 设 $M\to R^{m+n}$ 是欧氏空间的浸入子流形。我们可以定义广义高斯映照 $\gamma: M\to G_{m,n}$。对任何一点 $p\in M$，有切空间 T_pM，将 T_pM 按 R^{m+n} 平行移动到 R^{m+n} 原点得到 R^{m+n} 中的 m 维子空间，即 Grassmann 流形 $G_{m,n}$ 中的一点 $\gamma(p)$，$\gamma: M\to G_{m,n}$ 称为高斯映照。Ruh E 和 Vilms J 证明了 γ 是调和映照的充要条件为 M 是 R^{m+n} 中的平行平均曲率子流形[94]。

我们将在第3章讨论由此而引起的调和映照在子流形理论中的应用。

例 10 如果 M 和 N 是 Kähler 流形，$f: M\to N$ 是全纯映照，那么 f 一定是调和映照。

因此，调和映照在复几何中有重要的应用。我们将在后面第4章进一步讨论。

例 11 在同伦理论中重要的 Hopf 映照 $h: s^3\to s^2$ 是调和映照。设 $s^3=\{(z_1, z_2)\in C^2; |z_1|^2+|z_2|^2=1\}$。对任何 $(z_1, z_2)\in s^3$

$$h(z_1, z_2)\overset{\text{def}}{=\!=}(2z_1\bar{z}_2,\ |z_1|^2-|z_2|^2)\in s^2 \tag{1.35}$$

不难验证 $h(z_1, z_2)$ 的每个分量都是 $C^2=R^4$ 上的2次齐次调和函数。从后面命题1.18的结果知道，它定义了 s^3 到 s^2 上的调和映照。我们来看这个映照的几何意义。设 $\pi: s^3\to CP'$ 是通常的 Hopf 纤维化映照。对任何 $(z_1', z_2')\in s^3$，如果存在 $\lambda\in C$，$|\lambda|=1$ 使 $(z_1', z_2')=\lambda(z_1, z_2)$，那末称 (z_1', z_2') 等价于 (z_1, z_2)。s^3 关于这个等价关系的商空间为 CP'。定义 $h_1: CP'\to C\cup\{\infty\}$ 如下：对任何 $[(z_1, z_2)]\in CP'$，其中 $[\cdot]$ 表示等价类元素，

$$h_1[(z_1, z_2)] = \begin{cases} z_1/z_2, & \text{当 } z_2 \neq 0 \\ \infty, & \text{当 } z_2 = 0 \end{cases} \tag{1.36}$$

再由球极投影 $P: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to s^2$，最终投影到 s^2 上。注意到对任何 $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$，

$$P(z) = \left(\frac{2R_e z}{|z|^2+1}, \frac{2I_m z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right), \tag{1.37}$$

从(1.35)式，(1.36)式和(1.37)式显然可见 $h = p \circ h_1 \circ \pi$。

§1.3 Bochner 型公式

Bochner 技巧在微分几何的诸多方面都有重要的应用。本节目的是推导调和映照中的 Bochner 型公式，并且给出它的一些应用。关于 Bochner 技巧的专门论述，及其在微分几何各方面的展开和运用，请参阅任鸿熙的专著[121]。

1.3.1 Hodge-Laplace 算子和 Weitzenböck 公式

设 $\pi: E \to M$ 是 Riemann 流形 M 上的 Riemann 向量丛。考虑向量丛 $\Lambda^p T^*M \otimes E$，它的任何一个截面 $\omega \in \Gamma(\Lambda^p T^*M \otimes E)$ 称为 E 值的 p 次外微分形式。

从 M 和 E 上的 Riemann 度量诱导 $\Lambda^p T^*M \otimes E$ 上的Riemann 度量如下：对任何 $\omega, \theta \in \Gamma(\Lambda^p T^*M \otimes E)$

$$\langle \omega, \theta \rangle \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \langle \omega(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}), \theta(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}) \rangle, \tag{1.38}$$

其中 $\{e_i\}$ 是 M 上的局部幺正标架场。

从 TM 上的 Levi-Civita 联络和 E 上的联络可诱导向量丛 $\Lambda^p T^*M \otimes E$ 上的联络如下：设 $\omega = \omega' \otimes s \in \Gamma(\Lambda^p T^*M \otimes E)$，其中 $\omega' \in \Gamma(\Lambda^p T^*M)$，$s \in \Gamma(E)$，那末对任何 $X \in TM$，有

$$\nabla_X \omega = (\nabla_X \omega') \otimes s + \omega' \otimes \nabla_X s. \tag{1.39}$$

所以，对 $X_1, \cdots, X_p \in \Gamma(TM)$，有

$$(\nabla_X \omega)(X_1, \cdots, X_p)$$
$$= (\nabla_X \omega')(X_1, \cdots, X_p) \otimes s + \omega'(X_1, \cdots, X_p) \otimes \nabla_X s$$

$$= \nabla_X \omega'(X_1, \cdots, X_p)) \otimes s - \sum_j \omega'(X_1, \cdots, \nabla_X X_j, \cdots, X_p) \otimes s + \nabla_X(\omega'(X_1, \cdots, X_p) \otimes s) - \nabla_X(\omega'(X_1, \cdots, X_p)) \otimes s$$

$$= \nabla_X(\omega(X_1, \cdots, X_p)) - \sum_j \omega(X_1, \cdots, \nabla_X X_j, \cdots, X_p) \tag{1.40}$$

从(1.38)式和(1.40)式容易验证 $\Lambda^p T^*M \otimes E$ 关于度量(1.38)和联络(1.40)构成 Riemann 向量丛。

我们来定义外微分算子 $d: \Gamma(\Lambda^p T^*M \otimes E) \to \Gamma(\Lambda^{p+1} T^*M \otimes E)$。对任何 $\omega \in \Gamma(\Lambda^p T^*M \otimes E)$ 以及 $X_0, \cdots, X_p \in \Gamma(TM)$,

$$d\omega(X_0, \cdots, X_p) = (-1)^k (\nabla_{X_k}\omega)(X_0, \cdots, \hat{X}_k, \cdots, X_p) \tag{1.41}$$

众所周知，对普通外微分形式的外微分算子有 $d^2 = 0$。但是，对向量丛值微分形式所定义的外微分算子，不具有这个性质。从(1.41)式不难导出

$$d^2\omega(X_0, \cdots, X_{p+1}) = \sum_{l<k} (-1)^{k+l} (R(X_l, X_k)\omega)(X_0, \cdots, \hat{X}_l \cdots \hat{X}_k, \cdots, X_{p+1}).$$

还可以定义余微分算子 $\delta: \Gamma(\Lambda^p T^*M \otimes E) \to \Gamma(\Lambda^{p-1} T^*M \otimes E)$ 如下：

$$\delta\omega(X_1, \cdots, X_{p-1}) = -(\nabla_{e_i}\omega)(e_i, X_1, \cdots, X_{p-1}), \tag{1.42}$$

其中 $\{e_i\}$ 是 M 上的局部幺正标架场。

对任何二个 E 值 p 形式 ω 和 θ，它们的整体内积定义为逐点内积的积分：

$$(\omega, \theta) \overset{\text{def}}{=} \int_M \langle \omega, \theta \rangle * 1$$

命题 1.7 设 M 为紧致 Riemann 流形，$\pi: E \to M$ 是任一 Riemann 向量丛，那末(1.41)式和(1.42)式定义的算子 d 和 δ 关于整体内积是互为共轭的。

证明 取任一点 $q \in M$ 附近的幺正标架场，并且使 $\nabla_{e_i} e_j|_p = 0$。设 $\omega \in \Gamma(\Lambda^{p-1} T^*M \otimes E)$，$\theta \in \Gamma(\Lambda^p T^*M \otimes E)$，那末根据

(.411)式和(1.42)式在 q 点，我们有

$$\begin{aligned}\langle d\omega, \theta\rangle &= (-1)^{k+1}\langle\nabla_{e_{i_k}}\omega(e_{i_1}, \cdots, \hat{e}_{i_k}, \cdots, e_{i_p}), \theta(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p})\rangle \\ &= (-1)^{k+1}\nabla_{e_{i_k}}\langle\omega(e_{i_1}, \cdots, \hat{e}_{i_k}, \cdots, e_{i_p}), \theta(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p})\rangle - (-1)^{k+1}\langle\omega(e_{i_1}, \cdots, \hat{e}_{i_k}, \cdots, e_{i_p}), \nabla_{e_{i_k}}\theta(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p})\rangle \\ &= (-1)^{k+1}\nabla_{e_{i_k}}\langle\omega(e_{i_1}, \cdots, \hat{e}_{i_k}, \cdots, e_{i_p}), \theta(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p})\rangle - \langle\omega(e_{i_1}, \cdots, \hat{e}_{i_k}, \cdots, e_{i_p}), (\nabla_{e_{i_k}}\theta) \\ &\quad \cdot (e_{i_k}, e_{i_1}, \cdots, \hat{e}_{i_k}, \cdots, e_{i_p})\rangle \\ &= (-1)^{k+1}\nabla e_{i_k}\langle\omega(e_{i_1}, \cdots, \hat{e}_{i_k}, \cdots, \hat{e}_i), \theta(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p})\rangle + \langle\omega, \delta\theta\rangle. \end{aligned} \tag{1.43}$$

令

$$\Omega = \langle\omega(e_{i_1}, \cdots, \hat{e}_{i_k}, \cdots, e_{i_p}), \theta(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p})\rangle\omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \omega_m,$$

其中 $\{\omega_i\}$ 是 $\{e_i\}$ 的对偶基. 显然 Ω 是 M 上整体定义的 $n-1$ 次微分形式。并且，

$$\begin{aligned} d\Omega &= \omega_k \wedge \nabla_{e_k}\Omega \\ &= (-1)^{k+1}\nabla_{e_{i_k}}\langle\omega(e_{i_1}, \cdots, \hat{e}_{i_k}, \cdots, e_{i_p}), \theta(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p})\rangle * 1 \end{aligned} \tag{1.44}$$

将(1.44)式代入(1.43)式，并在 M 上积分得到

$$\begin{aligned}(d\omega, \theta) &= \int_M \langle d\omega, \theta\rangle * 1 = \int_M d\Omega + (\omega, \delta\theta) \\ &= (\omega, \delta\theta). \end{aligned}$$

∎

现在，我们可以定义 Hodge-Laplace 算子为

$$\Delta = d\delta + \delta d. \tag{1.45}$$

它将任何一个 E 值 p 形式映照成 E 值 p 形式。

命题 1.8 当 M 是紧流形时，Δ 是自共轭、半正定的椭圆算子。

证明 从上一命题的有关式子立即可得

$$(\Delta\omega, \theta) = \int_M \langle(d\delta + \delta d)\omega, \theta\rangle * 1$$

$$=\int_M \langle \delta\omega, \delta\theta\rangle *1+\int_M \langle d\omega, d\omega\rangle *1$$
$$=(\delta\omega, \delta\theta)+(d\omega, d\theta),$$

其中 ω 和 θ 是任意二个 E 值 p 形式。因此，

$$(\Delta\omega, \theta)=(\omega, \Delta\theta),$$

即 Δ 是自共轭算子。而

$$(\Delta\omega, \omega)=(d\omega, d\omega)+(\delta\omega, \delta\omega)\geqslant 0,$$

并且等号成立充要条件是 $d\omega\equiv 0$ 和 $\delta\omega\equiv 0$。因此，Δ 是半正定算子。至于它的椭圆性从下面要证的 Weitzenböck 公式以及迹-Laplace 算子的椭圆性即可得到。 ∎

对任何一个 E 值 p 形式 ω，如果 $\Delta\omega\equiv 0$，那么 ω 称为调和形式。当 M 为紧流形时，前面已经说明 ω 为调和形式的充要条件是 ω 为闭形式，即 $d\omega\equiv 0$，和 ω 为余闭形式，即 $\delta\omega\equiv 0$。

现在，我们来考虑光滑映照 $f: M\to N$。它诱导了 $f^{-1}TN$ 值的 1 形式 df，即 $df\in\Gamma(T^*M\otimes f^{-1}TN)$，它的能量密度可表示成

$$e(f)=\frac{1}{2}|df|^2,$$

这里 $|\cdot|$ 表示线性映照 $f_*: T_pM\to T_{f(p)}N$ 的希尔伯特-Schmidt 模。再来看 f 的第二基本形式。从式(1.41)，有

$$\begin{aligned}d(df)(X_1, X_2)&=(\nabla_{X_1}df)(X_2)-(\nabla_{X_2}df)(X_1)\\&=B_{X_1X_2}(f)-B_{X_2X_1}(f)\\&\equiv 0.\end{aligned}$$

这说明映照 f 第二基本形式的对称性，相当于 df 是 $f^{-1}TN$ 值的闭形式。而从式(1.42)，则有

$$\delta(df)=-(\nabla_{e_i}df)(e_i)=-\tau(f),$$

因此 f 是调和映照的充要条件是 df 是余闭形式。这样，可得下列结论。

推论 1.8 当 M 是紧流形时，f 是调和映照的充要条件为 df 是 $f^{-1}TN$ 值的调和 1-形式。

下面来推导重要的 Weitzenböck 公式。

命题1.9 对任一向量丛值 p 形式 ω 有

$$\Delta\omega=-\nabla^2\omega+S,$$

其中 ∇^2 表示前面引入的迹-Laplace 算子，且对任何 $X_1,\cdots,X_p\in\Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned}&S(X_1,\cdots,X_p)\\&=(-1)^k(R(e_i,X_k)\omega)(e_i,X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p).\end{aligned}\tag{1.46}$$

证明 在M上的任何一点 q 附近取局部幺正标架场 $\{e_i\}$，并且 $\nabla_{e_i}e_j|_q=0$。那末，对任何 $X_1,\cdots,X_p\in\Gamma(TM)$，在 p 点成立

$$\begin{aligned}d\delta\omega(X_1,\cdots,X_p)&=(-1)^{k-1}(\nabla_{X_k}\delta\omega)(X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p)\\&=(-1)^{k-1}\nabla_{X_k}\delta\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p)\\&\quad-\sum_j(-1)^{k-1}\delta\omega(X_1,\cdots,\nabla_{X_k}X_j,\\&\quad\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p)\\&=-(-1)^{k-1}\nabla_{X_k}(\nabla_{e_i}\omega)(e_i,X_1,\\&\quad\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p)\\&\quad+\sum_j(-1)^{k-1}(\nabla_{e_i}\omega)(e_i,X_1,\\&\quad\cdots,\nabla_{X_k}X_j,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p)\\&=(-1)^k(\nabla_{X_k}\nabla_{e_i}\omega)(e_i,X_1,\\&\quad\cdots,\hat{X}_k,\cdots X_p).\end{aligned}\tag{1.47}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}&\delta d\omega(X_1,\cdots,X_p)\\&=-(\nabla_{e_i}d\omega)(e_i,X_1,\cdots,X_p)\\&=-\nabla_{e_i}d\omega(e_i,X_1,\cdots,X_p)\\&\quad+\sum_j d\omega(e_i,X_1,\cdots,\nabla_{e_i}X_j,\cdots,X_p)\\&=-\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}\omega)(X_1,\cdots,X_p)\\&\quad-(-1)^k\nabla_{e_i}(\nabla_{X_k}\omega)(e_i,X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p)\\&\quad+\sum_j(\nabla_{e_i}\omega)(X_1,\cdots,\nabla_{e_i}X_j,\cdots,X_p)\\&\quad+\sum_{j>k}(-1)^k(\nabla_{X_k}\omega)(e_i,X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,\nabla_{e_i}X_j,\cdots,X_p)\\&\quad+(-1)^j(\nabla_{\nabla_{e_i}X_j}\omega)(e_i,X_1,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_p)\end{aligned}$$

$$+\sum_{j<k}(-1)^k(\nabla_{X_k}\omega)(e_i, \cdots, \nabla_{e_i}X_j, \cdots, \hat{X}_k, \cdots, X_p)$$

$$= -(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\omega)(X_1, \cdots, X_p)$$
$$-(-1)^k(\nabla_{e_i}\nabla_{X_k}\omega)(e_i, X_1, \cdots, \hat{X}_k, \cdots, X_p)$$
$$+(-1)^j(\nabla_{\nabla_{e_i}X_j}\omega)(e_i, X_1, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_p). \tag{1.48}$$

从(1.47)式和(1.48)式得到

$$\Delta\omega(X_1, \cdots, X_p) = -(\nabla^2\omega)(X_1, \cdots, X_p) + (-1)^k(\nabla_{X_k}\nabla_{e_i}\omega - \nabla_{e_i}\nabla_{X_k}\omega + \nabla_{[e_i, X_k]}\omega)(e_i, X_1, \cdots, \hat{X}_k, \cdots, X_p)$$
$$= -(\nabla^2\omega + S)(X_1, \cdots, X_p).$$

1.3.2 Bochner 型公式及其应用

首先应用 Weitzenböck 公式推导调和映照的能量密度的 Bochner 型公式，然后给出它的一些应用。这个公式在调和映照理论中具有重要的作用，从以后各章将可看出它在各种问题中的应用。

对光滑映照 $f: M\to N$，取 $\omega = df\in\Gamma(T^*M\otimes f^{-1}TN)$，从(1.46)式可见，对任何 $X\in\Gamma(TM)$，

$$S(X) = -(R(e_i, X)\omega)e_i$$
$$= -R^N(f_*e_i, f_*X)f_*e_i + f_*Ric^M X. \tag{1.49}$$

命题 1.10 设 $f: M\to N$ 是调和映照，那末，下式成立：

$$\Delta e(f) = |B(f)|^2 - \langle R^N(f_*e_i, f_*e_j)f_*e_i, f_*e_j\rangle$$
$$+\langle f_*Ric^M e_i, f_*e_i\rangle. \tag{1.50}$$

证明 取M上任何一点p附近的幺正标架场 $\{e_i\}$，并且 $\nabla_{e_i}e_j|_p = 0$。从 Weizenböck 公式(1.46)，立即可得

$$\Delta e(f) = \Delta\frac{1}{2}\langle df, df\rangle$$
$$= \langle\nabla^2 df, df\rangle + |B(f)|^2$$
$$= -\langle\Delta(df), df\rangle + |B(f)|^2$$
$$-\langle R^N(f_*e_i, f_*e_j)f_*e_i, f_*e_j\rangle$$
$$+\langle f_*Ric^M e_i, f_*e_i\rangle. \tag{1.51}$$

考虑到 f 是调和映照，$\Delta(df)=0$，从(1.51) 式立即得到所要证明的公式(1.50)。

下面，我们来考察公式(1.50)的一些应用。

定理 1.11[29] 设M是 Ricci 曲率非负的紧致流形，N为截面曲率非正的流形. 设 $f: M\to N$ 是调和映照. 那末，f 一定是全测地映照. 进而

1) 如果M的 Ricci 曲率至少在有些点为正，那末 f 为常值映照。

2) 如果N的截面曲率为负，那末 f 或者是常值映 照，或 者 $f(M)$是N 中的闭测地线。

证明 将等式(1.50)二边积分，得到

$$\begin{aligned}\int_M[&-\langle R^N(f_*e_i, f_*e_j)f_*e_i, f_*e_j\rangle\\&+\langle f_*Ric^Me_i, f_*e_i\rangle]*1\\=&-\int_M|B(f)|^2*1\leqslant 0.\end{aligned}\tag{1.52}$$

而根据定理 1.11 的假定，式(1.52)左端的被积函数非负. 因此，积分恒等于 0。那么从式 (1.52) 可知$|B(f)|\equiv 0$，即 f 是全测地映照，并且

$$-\langle R^N(f_*e_i, f_*e_j)f_*e_i, f_*e_j\rangle+\langle f_*Ric^Me_i, f_*e_i\rangle\equiv 0.\tag{1.53}$$

进而

1) 如果M的 Ricci 曲率在某点 x 为正。那末取 x 点 Ricci 主方向所生成的局部标架场$\{e_i\}$，因而

$$Ric^M(e_i)=R_{ii}e_i,\ R_{ii}>0.$$

那末，在 x 点

$$\langle f_*Ric^Me_i, f_*e_i\rangle=R_{ii}\langle f_*e_i, f_*e_i\rangle,$$

考虑到(1.53)式

$$R_{ii}\langle f_*e_i, f_*e_i\rangle\equiv 0.$$

所以，在 x 点

$$2e(f)=\langle f_*e_i, f_*e_i\rangle\leqslant\frac{1}{\min R_{ii}}(R_{ii}\langle f_*e_i, f_*e_i\rangle)=0.$$

另一方面，从(1.50)式和定理假定知

$$\Delta e(f)\geqslant 0.$$

根据极值原理，即知 $e(f)\equiv$ 常数，所以 $e(f)\equiv 0$，f 是常值映照。

2) 首先考虑到

$$\langle R^N(f_*e_i, f_*e_j)f_*e_i, f_*e_j\rangle\equiv 0,\ (\text{其中 } i, j \text{ 不作和}) \tag{1.54}$$

如果存在一点 x，使 f_*e_i 中至少有2个向量是独立的，不妨设 f_*e_1 和 f_*e_2 独立。那么，当 N 截面曲率为负时，

$$\langle R^N(f_*e_1, f_*e_2)f_*e_1, f_*e_2\rangle<0$$

这与(1.54)矛盾，所以映照 f 的秩至多为1。如果有一点秩是零，且同样由极值原理知 $e(f)\equiv$ 常数，从而 f 的秩处处是0。否则 f 的秩为1，这时 $f(M)$ 是 N 中的闭测地线。 ∎

如果，对式(1.50)稍加分析，还可以得到目标流形可能是正曲率流形时的结果。

定理 1.12[105] 设 a, b 是二个正常数，使 $Ric^M\geqslant a$, $Riem^N\leqslant b$，其中 Ric^M 表示紧致流形 M 的 Ricci 曲率，$Riem^N$ 表示流形 N 的截面曲率。设 $f: M\to N$ 是调和映照并且

$$\max\ \operatorname{rank} f\leqslant p,\ p\geqslant 2.$$

如果能量密度满足

$$e(f)\leqslant\frac{p}{2(p-1)}\frac{a}{b},$$

那末，f 是常值映照或全测地映照；特别地，当 $e(f)\leqslant\frac{a}{2b}$ 时，f 必为常值映照。

证明 从(1.50)式可以得到

$$\begin{aligned}\Delta e(f)=|B(f)|^2-(|f_*e_i|^2|f_*e_j|^2-\langle f_*e_i, f_*e_j\rangle\\ \times\langle f_*e_i, f_*e_j\rangle)Riem^N(f_*e_i, f_*e_j)\\ +R_{ij}\langle f_*e_i, f_*e_j\rangle.\end{aligned} \tag{1.55}$$

取 M 的局部幺正标架场 $\{e_i\}$，使 f 的第一基本形式 $\langle f_*e_i, f_*e_j\rangle$

在 x 点对角化，即在 x 点 $\langle f_* e_i,\ f_* e_j\rangle = \lambda_i \delta_{ij}$. 设 f 在 x 点的秩为 q. 不妨设 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \lambda_q > 0$, 并且 $q \leqslant p$. 那末，在 x 点 (1.55) 式化为

$$\Delta e(f) \geqslant |B(f)|^2 - b\left(4(e(f))^2 - \sum_{s=1}^{q} \lambda_s^2\right) + 2ae(f). \quad (1.56)$$

由 Schwarz 不等式，(1.56) 式化为

$$\Delta e(f) \geqslant |B(f)|^2 + 2e(f)\left[a - \frac{2(p-1)}{p} be(f)\right]. \quad (1.57)$$

所以，在定理条件下

$$\Delta e(f) \geqslant 0,$$

即 $e(f)$ 是紧流形 M 上的次调和函数. 由极值原理，得到 $e(f) \equiv$ 常数，再代入(1.57)式得到

$$B(f) \equiv 0$$

和

$$e(f)\left[a - \frac{2(p-1)}{p} be(f)\right] \equiv 0.$$

如果 $e(f) \neq 0$, 那末，f 为全测地映照并且

$$e(f) \equiv \frac{pa}{2(p-1)b}.$$

特别地，如果 $e(f) \leqslant \frac{a}{2b}$，必有 $e(f) < \frac{pa}{2(p-1)b}$，从上面讨论知 $e(f)$ 一定恒等于零.

如果 M 是完备流形，只要假定能量有限，也可得到相应的结果.

定理 1.13[103] 设 M 是完备非紧的流形，它的 Ricci 曲率非负；又设 N 是具非正截面曲率的流形. 那末，调和映照 $f: M \to N$ 一定是常值映照，只要它的能量有限.

证明 由于始流形和目标流形的假定条件，(1.50) 式化为

$$\Delta e(f) \geqslant |B(f)|^2, \quad (1.58)$$

另从 Schwarz 不等式不难验证

$$|\nabla e(f)|^2 \leqslant 2e(f)|B(f)|^2. \quad (1.59)$$

现在取 $\varepsilon > 0$, 从(1.58)式和(1.59)式可得

$$
\begin{aligned}
\Delta\sqrt{e(f)+\varepsilon} &= -\frac{1}{4}(e(f)+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}}|\nabla e(f)| \\
&\quad+\frac{1}{2}(e(f)+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\Delta e(f) \\
&\geqslant -\frac{1}{2}(e(f)+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}}e(f)|B(f)|^2 \\
&\quad+\frac{1}{2}(e(f)+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}|B(f)|^2 \\
&=\frac{1}{2}(e(f)+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}|B(f)|^2\left(1-\frac{e(f)}{e(f)+\varepsilon}\right) \\
&\geqslant 0. \qquad (1.60)
\end{aligned}
$$

设 η 是 M 上任一具有紧致支集的函数，那末(1.60)式给出

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \int_M \eta^2\sqrt{e(f)+\varepsilon}\,\Delta\sqrt{e(f)+\varepsilon}*1 \\
&= -2\int_M \eta\sqrt{e(f)+\varepsilon}\langle\nabla\eta,\nabla\sqrt{e(f)+\varepsilon}\rangle*1 \\
&\quad-\int_M \eta^2|\nabla\sqrt{e(f)+\varepsilon}|^2*1, \qquad (1.61)
\end{aligned}
$$

设 $x_0\in M$ 是任何一点，B_R 和 B_{2R} 分别表示以 x_0 为中心，R 及 $2R$ 为半径的测地球。取 η 为如下截断函数

$$
\eta(x)=\begin{cases} 1, & x\in B_R \\ 0, & x\in M\backslash B_{2R}, \end{cases}
$$

并且 $0\leqslant\eta\leqslant1$，$|\nabla\eta|\leqslant\frac{d}{R}$，$d$ 为正常数。这样，(1.61)式化为

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant -2\int_{B_{2R}} \eta\sqrt{e(f)+\varepsilon}\langle\nabla\eta,\nabla\sqrt{e(f)+\varepsilon}\rangle*1 \\
&\quad-\int_{B_{2R}} \eta^2|\nabla\sqrt{e(f)+\varepsilon}|^2*1 \\
&\leqslant 2\left(\int_{B_{2R}\backslash B_R} \eta^2|\nabla\sqrt{e(f)+\varepsilon}|^2*1\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\cdot\left(\int_{B_{2R}\backslash B_R} (e(f)+\varepsilon)|\nabla\eta|^2*1\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad-\int_{B_{2R}\backslash B_R} \eta^2|\nabla\sqrt{e(f)+\varepsilon}|^2*1
\end{aligned}
$$

$$-\int_{B_R}|\nabla\sqrt{e(f)+\varepsilon}|^2*1.$$

它可看成关于$\left(\int_{B_{2R}\setminus B_R}\eta^2|\nabla\sqrt{e(f)+\varepsilon}|^2*1\right)^{\frac{1}{2}}$的二次三项式的不等式。因此

$$\int_{B_R}|\nabla\sqrt{e(f)+\varepsilon}|^2*1\leqslant\int_{B_{2R}\setminus B_R}(e(f)+\varepsilon)|\nabla\eta|^2*1$$

$$\leqslant\frac{d^2}{R^2}\int_{B_{2R}}(e(f)+\varepsilon)*1. \quad (1.62)$$

设 $B'_R=B_R\setminus\{x\in B_R; e(f)(x)=0\}$，那么(1.62)式化为

$$\int_{B'_R}\frac{|\nabla(e(f)+\varepsilon)|^2}{4(e(f)+\varepsilon)}*1\leqslant\frac{d^2}{R^2}\int_{B_{2R}}(e(f)+\varepsilon)*1.$$

令 $\varepsilon\to 0$，得

$$\int_{B'_R}\frac{|\nabla e(f)|^2}{4e(f)}*1\leqslant\frac{d^2}{R^2}\int_{B_{2R}}e(f)*1,$$

令 $R\to\infty$，并从能量有限的假定，得

$$\int_{M\setminus\{e(f)=0\}}\frac{|\nabla e(f)|^2}{4e(f)}*1\leqslant 0.$$

这就证明了 $e(f)=$常数。又从能量有限的假定得到M的体积是有限的，如果 $e(f)\neq 0$。这是与具非负 Ricci 曲率的完备非紧流形的体积无限性是矛盾的[9]、[143]。因此，f 一定是常值映照。

∎

类似地，可将定理1.12 推广到始流形是完备非紧的情形，这里就不具体写出了。

§ 1.4 调和映照基本性质

1.4.1 极值原理

本节的极值原理可看作调和函数极值原理的某种推广。首先考察映照的复合公式。

设 M, N, 和$\bar{N}$是三个 Riemann 流形，相继有二个光滑映照 $f: M\to N$, $\bar{f}: N\to\bar{N}$。那么复合映照 $\bar{f}\circ f$ 将M映照到$\bar{N}$。可立即

得到下列复合公式。设 $X, Y\in \Gamma(TM)$，那末有

$$
\begin{aligned}
B_{XY}(\bar{f}\circ f) &= (\nabla_X d(\bar{f}\circ f))(Y) \\
&= \nabla_{\bar{f}_* f_* X}\bar{f}_* f_* Y - \bar{f}_* f_*(\nabla_X Y) \\
&= \nabla_{f_* X} d\bar{f}(f_* Y) - d\bar{f}(f_*\nabla_X Y) \\
&= (\nabla_{f_* X} d\bar{f})(f_* Y) + d\bar{f}(\nabla_{f_* X} f_* Y) \\
&\quad - d\bar{f}(f_*\nabla_X Y) \\
&= B_{f_* X f_* Y}(\bar{f}) + d\bar{f}(B_{XY}(f)),
\end{aligned} \tag{1.63}
$$

取它的迹，就得到复合映照 $\bar{f}\circ f$ 张力场的表达式：

$$
\tau(\bar{f}\circ f) = B_{f_* e_i f_* e_i}(\bar{f}) + d\bar{f}(\tau(f)). \tag{1.64}
$$

从(1.63)式和(1.64)式立即得到下面的命题。

命题1.14 如果 f 和 $\bar{f}$ 都是全测地映照，那末，$\bar{f}\circ f$ 也是全测地映照；如果 f 是调和映照，$\bar{f}$ 是全测地映照，那末 $\bar{f}\circ f$ 一定是调和映照。

注 从(1.64)式可见调和映照的复合映照一般不一定是调和映照。事实上，考虑 R^3 中的极小曲面，其上测地线一般不一定是直线。

如果 $\bar{N}=R$，即 $\bar{f}$ 是 N 上的函数。对它一样可定义第二基本形式，即得到 $\bar{f}$ 的 Hessian，记为 $\mathrm{Hess}(\bar{f})(X, Y)$，这里 $X, Y\in\Gamma(TN)$。如果对任何 $X\in\Gamma(TN)$，$\mathrm{Hess}(\bar{f})(X, X)\geqslant 0(>0)$，那末，称 $\bar{f}$ 是 N 上的凸函数（强凸函数）。如果 $\Delta_N\bar{f}\geqslant 0$，$\bar{f}$ 称为 N 上的次调和函数。

凸函数的几何意义如下：在(1.64)式中取 $M=-(-\varepsilon, \varepsilon)$，$f=\gamma:(-\varepsilon, \varepsilon)\to N$ 是 N 上的任一测地线，那末有

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2(\bar{f}\circ\gamma)}{ds^2} &= B_{\gamma'\gamma'}(\bar{f}) + d\bar{f}(\tau(\gamma)) \\
&= \mathrm{Hess}(\bar{f})(\gamma', \gamma'),
\end{aligned}
$$

其中 γ' 表示测地线 γ 的切向量。由此可见，$\bar{f}$ 是 N 上凸函数的充要条件是它限制在 N 的任一测地线上是一元凸函数。

利用凸函数可以得到全测地映照和调和映照的特征。

命题1.15 f 是全测地映照的充要条件是将 N 任一邻域上

的凸函数 $\bar{f}$ 拉回得到M的相应邻域中的凸函数 $\bar{f}\circ f$; f 是调和映照的充要条件是将N任一邻域中的凸函数 $\bar{f}$ 拉回得到M的相应邻域中的次调和函数 $\bar{f}\circ\bar{f}$.

证明 从复合公式(1.63)可见,如果f是全测地映照,$\bar{f}$是凸函数,那末 $\bar{f}\circ f$ 一定是凸函数. 反之,如果f不是全测地映照,必存在 $x_0\in M$ 和 $v\in T_{x_0}M$, 使 $B_{vv}(f)|_{x_0}\neq 0$. 记

$$w=B_{vv}(f)|_{x_0}\in T_{f(x_0)}N.$$

取 $f(x_0)$附近的法坐标(y^α). 在 $f(x_0)$ 的法坐标邻域中定义函数

$$\bar{f}=b_\alpha y^\alpha+\sum(y^\alpha)^2,$$

其中 b_α 待后取定. 它显然是 $f(x_0)$附近的凸函数,并且

$$\mathrm{Hess}(\bar{f})|_{f(x_0)}=I,$$

这里I是单位阵. 如果记

$$w=w^\alpha\frac{\partial}{\partial y^\alpha},$$

那末,取 b_α, 使满足 $b_\alpha w^\alpha<-|df(v)|^2$. 显然

$$d\bar{f}(w)|_{f(x_0)}=b_\alpha w^\alpha,$$

这样,代入复合公式(1.63)得到

$$\begin{aligned}B_{vv}(\bar{f}\circ f)|_{x_0}&=\mathrm{Hess}(\bar{f})(f_*v,\ f_*v)|_{f(x_0)}+d\bar{f}(w)|_{f(x_0)}\\&=|df(v)|^2+b_\alpha w^\alpha<0.\end{aligned}$$

这与假设 $\bar{f}\circ f$ 是 x_0 附近凸函数相矛盾.

下面来证明命题的后半部分.

如果 $\bar{f}$ 是凸函数,f 是调和映照,那末,从复合公式(1.64)立即得到

$$\Delta(\bar{f}\circ f)=B_{f_*e_i f_*e_i}(\bar{f})\geqslant 0.$$

因此,调和映照将凸函数复合成次调和函数. 反之,如果f不是调和映照,那末,存在 $x_0\in M$, 使 $\tau(f)(x_0)=w\neq 0$. 和前面一样,我们可取 $f(x_0)$附近的凸函数 $\bar{f}$, 并且满足

$$d\bar{f}(w)<-2e(f)(x_0),\ \mathrm{Hess}(\bar{f})|_{f(x_0)}=I.$$

那末,从复合公式(1.64)立即得到

$$\Delta(\bar{f}\circ f)|_{x_0}=\tau(\bar{f}\circ f)|_{x_0}=2e(f)(x_0)+d\bar{f}(\tau(f))|_{x_0}$$

$$=2e(f)(x_0)+d\bar{f}(w)<0.$$

这与假设 $\bar{f}\circ f$ 是 x_0 附近的次调和函数相矛盾。 ∎

因此，我们有下列极值原理。

定理 1.16[38] 设 $f: M\to N$ 是调和映照，其中M可能有边。假定 $f(M)\subset V$，并且 $\bar{f}: V\to R$ 是凸函数。如果 $\bar{f}\circ f$ 在M的内点达到极大值，那末，$\bar{f}\circ f$ 是常数。

推论 1.17 设M是紧致无边流形，$f: M\to N$ 是调和映照，并且 $f(M)\subset V\subset N$，其中V上有强凸函数$\bar{f}$，那末，f是常值映照。

证明 如果f不是常值映照，必存在 $X\in T_{x_0}M$，使 $f_*X\neq 0$。设 $\bar{f}$ 是V上的严格凸函数，因此 $\mathrm{Hess}(\bar{f})(f_*X, f_*X)>0$。而从定理1.16知 $\bar{f}\circ f$ 是常数，代入复合公式 (1.64) 就得到矛盾。 ∎

复合公式的另一重要应用是当N是$\bar{N}$的子流形的情形。考虑 $f: M\to N$，而 $i: N\to\bar{N}$ 是等距浸入。那末，i 作为映照的第二基本形式和N作为$\bar{N}$子流形时的第二基本形式相一致。如果令 $F=i\circ f$，那末，从式(1.64)立即得到f是调和映照的充要条件为$\tau(F)$落在N的法空间中。如果 $N=S^n$，则 $f: M\to S^n$ 是调和映照的充要条件是 $\Delta_M F$ 在每点都平行于F。这里，F表示M到 R^{n+1} 的映照，它由$(n+1)$个分量表示，而 $\Delta_M F$ 表示每个分量经 Laplace算子作用后组成的向量。这样，我们有下列有用的结果。

命题 1.18 设 $f: R^{m+1}\to S^n\hookrightarrow R^{n+1}$ 由 $n+1$ 个 k 次齐次调和多项式所定义，那末，它在球面 S^m 上的限制 $f|_{S^m}: S^m\to S^n$ 是调和映照。

证明 从前面讨论，只要说明f的每个分量，都是 S^m 上具有相同特征值的特征函数。一般地，对R^{m+1}上的任何 k 次齐次函数ϕ，有公式

$$\Delta_{S^m}\phi=\Delta_{R^{m+1}}\phi-k(m+k-1)\phi,$$

据此即得我们的结论。至于上述公式，不难从齐次函数的性质经过计算直接得到，留给读者作为练习。

我们再回到极值原理，先证明下列引理。

引理 1.19 设 N' 是 N 的超曲面，$y_0\in N'$ 是任意一点，并且 N' 在 N 中的第二基本形式 B 在 y_0 是确定的。那末，存在 y_0 在 N 中的邻域 V 和强凸函数 $\bar{f}: V\to R$，使 $\bar{f}^{-1}(0)=N'\cap V$，并且在 N' 的凹侧上 $\bar{f}<0$。

注 N' 的第二基本形式 B 在 y_0 是确定的，是指对任何 $X, Y\in T_{y_0}N$，存在 $\lambda>0$，使 $B(x, x)=\lambda B(y, y)$。N' 的凹侧是由 $B(x, x)$ 方向所指的一侧。

证明 y_0 在 N 的邻域 V 中存在以 N' 为基准超曲面的测地平行坐标系，即在 V 中存在局部坐标 $(u_1, \cdots, u_n)$，使 $N'\cap V$ 由 $u^n=0$ 所确定，它的 u_n 坐标曲线是测地线并且 $|u_n|$ 是从 N' 开始的弧长，在 N' 的凹侧 u_n 取负值，而在 N' 的另一侧 u_n 取正值。在 $N'\cap V$ 中，显然有诱导坐标系 $(u_1, \cdots, u_{n-1})$，取 $N'\cap V$ 在 N 中的标准嵌入 $i: (u_1, \cdots, u_{n-1})\to(u_1, \cdots, u_{n-1}, 0)$，定义函数 $u_n: (u_1, \cdots, u_n)\to u_n$。那末，显然有 $u_n\circ i=0$。从复合公式(1.63)得到，对任何非零 $X\in T_{y_0}N'$，

$$\mathrm{Hess}(u_n)(i_*x, i_*x)=-du_n(B(x, x)).$$

由于 u_n 在 $B(x, x)$ 方向上变化为负，因此 $du_n(B(x, x))<0$，即 $\mathrm{Hess}(u_n)(i_*x, i_*x)>0$，但

$$\mathrm{Hess}(u_n)\left(\frac{\partial}{\partial u_n}, \frac{\partial}{\partial u_n}\right)=0.$$

定义 V 上的函数 $\bar{f}=(u_n+1)^2-1$。那末，对任何 $Y\in T_{y_0}N$，

$$\mathrm{Hess}(\bar{f})(Y, Y)|_{y_0}=2[(\nabla_Y u_n)^2+\mathrm{Hess}(u_n)(Y, Y)].$$

所以，对 $X\in T_{y_0}N'$，

$$\mathrm{Hess}(\bar{f})(X, X)|_{y_0}=2\mathrm{Hess}(u_n)(X, X)>0$$

和

$$\mathrm{Hess}(\bar{f})\left(\frac{\partial}{\partial u_n}, \frac{\partial}{\partial u_n}\right)=2.$$

这就说明 $\bar{f}$ 在 y_0 附近是强凸函数，显然 $\bar{f}$ 也满足引理的其它要求。

定理 1.20[95] 设 $f: M\to N$ 是非常值调和映照，N' 是 N 的超曲面，它的第二基本形式 B 在某点 $y_0=f(x_0)\in N'$ 是确定的。

那末，不存在 $x_0\in M$ 的一个邻域 U，使 $f(U)$ 完全落在 N' 的凹侧。

证明　对 y_0 的某邻域 V，取引理1.19中的强凸函数 $\bar{f}$。如果 x_0 有邻域 U 使 $f(U)$ 完全落在 N' 在 V 中的凹侧，那末，对任何点 $x\in U$，$\bar{f}(f(x))\leqslant 0=\bar{f}\circ f(x_0)$，即 x_0 是 $\bar{f}\circ f$ 在 U 中的极大点。根据定理1.16，$\bar{f}\circ f$ 在 U 中是常数。再代入复合公式(1.64)，我们有

$$0=\Delta(\bar{f}\circ f)=\mathrm{Hess}(\bar{f})(f_*e_i,\ f_*e_i),$$

但 $\bar{f}$ 是强凸函数，因此 f 是常值映照，而和定理的假设矛盾。∎

1.4.2　延拓唯一性

本节将应用 Aronszajn-Carleman 关于椭圆型方程的延拓唯一性定理来得到调和映照的延拓唯一性定理。

定理 1.21[3]　设 A 是二阶椭圆线性微分算子，它定义在 R^n 的区域 D 上。设 $u=(u',\cdots,u^r)$ 是 D 中的函数，并且满足微分不等式

$$|Au^\alpha|\leqslant\mathrm{Const}\left\{\sum_{i,\beta}\left|\frac{\partial u^\beta}{\partial x^i}\right|+\sum_\beta|u^\beta|\right\}.$$

如果在 D 的某一开集中 $u=0$，那末，在 D 中 $u=0$。

定理 1.22　设 M 是连通流形，f_1，f_2: $M\to N$ 是二个调和映照。如果它们在 M 的某一开子集上相同，那末，它们在整个 M 上的象是一样的。特别地，在开子集上是常值的调和映照必是常值映照。

证明　设 U 是 M 的一个局部坐标邻域，坐标为 (x^i)。在 U 的一个开子集上 $f_1=f_2$。我们可取 U 足够小，使 $f_1(U)$ 和 $f_2(U)$ 均落在 N 的同一局部坐标邻域 V 中，其中坐标为 (y^α)。记 $y^\alpha(f_1(x))$ 为 $y^2(x)$，$y^\alpha(f_2(x))$ 为 $v^{-\alpha}(x)$。我们对 $u^\alpha=y^\alpha-v^\alpha$ 应用定理1.21。从调和方程(1.29)得到

$$\Delta_M u^\alpha=\Delta_M y^\alpha-\Delta_M v^\alpha=-\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}y^\beta_i y^\gamma_j g^{ij}+\bar{\Gamma}'^\alpha_{\beta\gamma}v^\beta_i v^\gamma_j g^{ij}.$$

这里，$\bar{\Gamma}'^\alpha_{\beta\gamma}$ 表示 $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(v)$。上式右端可改写成

$$-\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(y^\beta_i-v^\beta_i)(y^\gamma_j+v^\gamma_j)g^{ij}+(\bar{\Gamma}'^\alpha_{\beta\gamma}-\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma})v^\beta_i v^\gamma_j g^{ij}$$

在U中，导数$y_i U_j$是有界的(如必要可将U适当缩小)；而且可用中值定理估计$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}-\Gamma'^{\alpha}_{\beta\gamma}$。这样，不难得到

$$|\Delta_M u^\alpha|\leqslant \mathrm{Const}\{\sum_{i,\beta}|u_i^\beta|+\sum_\beta|u^\beta|\}$$

在U上成立。如果u^α在U的某一开子集上为零，那末，从定理1.21即得$u=0$在整个U上成立。再由M的连通性立即得到所要的结论。

定理1.22可推广到任一p-形式的情形。对此有下面定理。

定理1.23[4] 设M是连通流形，$\sigma\in\Gamma(\Lambda^p T^*M)$，并且对任何紧致子集$K\subset M$，存在$C_K$，使

$$|d\sigma|^2+|\delta\sigma|^2\leqslant C_K|\sigma|^2.$$

如果σ在M的某一开子集上为零，那末在M上$\sigma\equiv 0$。

同样，应用定理1.23可得到向量丛值p形式的延拓唯一性定理。而对调和映照$f:M\to N$，必诱导$f^{-1}TN$值的形式df。因此，调和映照的延拓唯一性定理可看作一般向量丛值p形式延拓唯一性定理的特例。

定理1.22告诉我们调和映照f如果在开子集上的映照秩数为零，则f的秩数处处为零。自然的问题是如果f的秩数在开子集上$\leqslant\gamma$，是否意味着f的秩数在M上处处都$\leqslant\gamma$。Sampson在文献[95]中说明当$\gamma=1$时，回答是肯定的。最近有反例说明一般是不成立的，见参考文献[69]。

1.4.3 第二变分公式和稳定调和映照

调和映照作为能量泛函的临界点，自然要考虑它的稳定性。我们首先推导它的第二变分公式。

设M是紧致无边的Riemann流形，$f:M\to N$是调和映照。对任何$v\in\Gamma(f^{-1}TN)$，有单参数映照族f_t，$-\varepsilon<t<\varepsilon$，满足

$$\begin{cases}\left.\dfrac{df_t}{dt}\right|_{t=0}=v\\ f_0=f.\end{cases}$$

f_t也可看成$(-\varepsilon,\varepsilon)\times M$到$N$的光滑映照。从式(1.32)，可知

$$\frac{d}{dt}E(f_t)=-\int_M\langle\frac{df_t}{dt},\ \tau(f_t)\rangle*1,$$

我们有

$$\frac{d^2}{dt^2}E(f_t)\Big|_{t=0}=-\int_M\langle v,\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau(f_t)\rangle\Big|_{t=0}*1. \quad (1.65)$$

取 $p\in M$ 附近的局部幺正标架场$\{e_i\}$且满足$\nabla_{e_i}e_i|_p=0$，那末，

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}e_i=\nabla_{e_i}\frac{\partial}{\partial t}=0.$$

这样，我们得到，在 p 点

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau(f_t)&=\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(\nabla_{e_i}df_t)e_i\\&=(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{e_i}df_t)e_i\\&=(\nabla_{e_i}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}df_t)e_i+\left(R\left(e_i,\ \frac{\partial}{\partial t}\right)df_t\right)e_i\\&=\nabla_{e_i}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}df_t)e_i+R^N(f_*e_i,\ v)f_*e_i\\&=\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}df_t)\frac{\partial}{\partial t}+R^N(f_*e_i,\ v)f_*e_i\\&=\nabla^2v+R^N(f_*e_i,\ v)f_*e_i.\end{aligned} \quad (1.66)$$

将(1.66)式代入(1.65)式，即得调和映照的第二变分公式如下：

$$\frac{d^2}{dt^2}E(f_t)\Big|_{t=0}=-\int_M\langle\nabla^2v+R^N(f_*e_i,\ v)f_*e_i,\ v\rangle*1 \quad (1.67)$$

它首先是由 Smith 和 Mazet 得到的[111]、[77]。

从第二变分公式(1.67)，我们定义调和映照的指标形式为

$$\begin{aligned}I(v,\ w)&\overset{\text{def}}{=\!=}\int_M\langle-\nabla^2v-R^N(f_*e_i,\ v)f_*e_i,\ w\rangle*1\\&\overset{\text{def}}{=\!=}\int_M\langle J_fv,\ w\rangle*1,\end{aligned} \quad (1.68)$$

其中

$$J_f=-\nabla^2-R^N(f_*e_i,\ \cdot)f_*e_i \quad (1.69)$$

从迹-Laplace 算子和曲率张量的性质，我们知道 $I(v,\ w)$是定义在$\Gamma(f^{-1}TN)$上对称双线性型，J_f 是 $\Gamma(f^{-1}TN)$ 上的二阶强

椭圆微分算子。

像其它几何变分问题一样，我们可以定义调和映照 f 的指标数 $\mathrm{index}(f)$，即使指标形式为负定的 $\Gamma(f^{-1}TN)$ 的子空间的最大维数。当 M 为紧致流形时，根据椭圆算子的理论 $\mathrm{index}(f)<\infty$。我们还可以定义零化数 $\mathrm{null}(f)=\dim\ker J_f$。当 M 为紧流形时，$\mathrm{null}(f)<\infty$。我们还称 $v\in\ker J_f$ 为调和映照 f 的 Jacobi 场。

第二变分公式是很重要的。很多整体微分几何的定理都从第二变分公式及相应的变分技巧得到。

我们再来定义调和映照的稳定性。设 $f: M\to N$ 是调和映照，如果对任何沿着 f 的向量场 $v\in\Gamma(f^{-1}TN)$，都有 $I(v, v)\geqslant 0$，那末，称 f 为稳定的调和映照。由指标数的定义可见，指标数为零的调和映照就是稳定调和映照。

从(1.68)式容易看出，如果目标流形 N 的截面曲率非正，那末任何到 N 的调和映照都是稳定调和映照。从这里也立即可发现调和映照的稳定性和极小子流形稳定性的不同之处。众所周知，当 $f: M\to N$ 为等距浸入时，f 是调和的充要条件为 f 是极小浸入。但 f 作为调和映照的稳定性与 f 作为极小浸入的稳定性很不一样。作为调和映照时，N 为欧氏空间时必稳定，但欧氏空间中有完备极小曲面悬链面，作为极小曲面，它是不稳定的。另一方面，设柱面 $f: S^3\to S^3\times R$ 是稳定极小浸入，但 f 作为调和映照是不稳定的。

若 $M=N$，最简单的映照是恒同映照，它显然是调和映照。但它有可能是不稳定的。Smith[111] 说明了 $S^n(n\geqslant 3)$ 上的恒同映照是不稳定的，并算出它的指标数为 $n+1$。更一般地，我们可以证明下列结果。

定理 1.24[123] 当 $n>2$ 时，从 S^n 到任何 Riemann 流形的任一稳定调和映照一定是常值映照。

证明 将 S^n 按标准方式嵌入 R^{n+1}，考虑 R^{n+1} 上线性函数在 S^n 上限制的梯度向量

$$v\in\Theta=\{\mathrm{grad}h;\ h=F|_{S^n},\ F\ \text{在}\ R^{n+1}\ \text{上线性}\}.$$

对任何$x\in S^n$，和$\alpha\in\mathbb{R}^{n+1}$，$h(x)=\langle\alpha, x\rangle$，那末

$$v=\operatorname{grad}\langle\alpha, x\rangle=\langle\alpha, e_i\rangle e_i,$$

其中$\{e_i\}$是S^n中局部么正标架场。由此可见v就是$\mathbb{R}^{n+1}$中的平行向量场在球面S^n上的投影。它还满足如下性质

$$\nabla_X v=-hX, \tag{1.70}$$

$$\nabla^2 v=-v, \tag{1.71}$$

这里∇是S^n上的标准度量的Levi-Civita联络。事实上，取x点附近的局部么正标架场$\{e_i\}$，并使$\nabla_{e_i}e_j|_x=0$，那末，在x点，

$$\begin{aligned}\nabla_X v&=\nabla_X(\langle\alpha, e_i\rangle e_i)=\langle\alpha, \overline{\nabla}_X e_i\rangle e_i\\&=\langle\alpha, \langle\overline{\nabla}_X e_i, x\rangle x\rangle e_i=-\langle\alpha, \langle e_i, \overline{\nabla}_X x\rangle x\rangle e_i\\&=-\langle\alpha, x\rangle\langle e_i, X\rangle e_i=-hX,\end{aligned}$$

其中$\overline{\nabla}$表示$\mathbb{R}^{n+1}$中的共变导数算子。并且，

$$\begin{aligned}\nabla^2 v&=\nabla_{e_i}(-h_{e_i})=-e_i(h)e_i\\&=-\operatorname{grad}h=-v.\end{aligned}$$

现在，我们将$f_*v\in\Gamma(f^{-1}TN)$代入第二变分公式(1.68)：

$$\begin{aligned}&I(f_*v, f_*v)\\&=-\int_{S^n}\langle\nabla^2 f_*v+R^N(f_*e_i, f_*v)f_*e_i, f_*v\rangle*1,\end{aligned} \tag{1.72}$$

它是定义在$\mathbb{R}^{n+1}$上的二次型，根据稳定性假定，它必是半正定的。下面，对(1.72)式作进一步计算。首先

$$\begin{aligned}-\nabla^2 f_*v&=-\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}(df)v\\&=-\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}df)v-\nabla_{e_i}df(\nabla_{e_i}v)\\&=-(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}df)v-2(\nabla_{e_i}df)(\nabla_{e_i}v)\\&\quad-df(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}v).\end{aligned}$$

考虑到(1.70)式和(1.71)式

$$-\nabla^2 f_*v=-(\nabla^2(df)v+2(\nabla_{e_i}df)(he_i)+f_*v, \tag{1.73}$$

根据式(1.49)以及f的调和性，有

$$\begin{aligned}-(\nabla^2 df)v&=R^N(f_*e_i, f_*v)f_*e_i-f_*Ricv\\&=R^N(f_*e_i, f_*v)f_*e_i-(n-1)f_*v,\end{aligned} \tag{1.74}$$

$$(\nabla_{e_i}df)(he_i)=h(\nabla_{e_i}df)e_i=0, \tag{1.75}$$

将(1.74)式和(1.75)式代入(1.73)式得到

$$-\nabla^2 f_* v = R^{\nabla}(f_* e_i, f_* v) f_* e_i + (2-n) f_* v, \quad (1.76)$$

将(1.76)式代入(1.72)式得到

$$I(f_* v, f_* v) = \int_{S^n} (2-n) \langle f_* v, f_* v \rangle * 1.$$

因此

$$\begin{aligned} \operatorname{trace} I(f_* v, f_* v) &= \int_{S^n} (2-n) \operatorname{trace} \langle f_* v, f_* v \rangle * 1 \\ &= 2(2-n) E(f) \geqslant 0, \end{aligned}$$

这迫使 $E(f)=0$，即 f 是常值映照。 ∎

应用类似的技巧，有下面的定理。

定理 1.25[73] 设 M 是紧致流形，那末，当 $n>2$ 时，任何稳定调和映照 $f: M \to S^n$ 必是常值映照。

证明 沿 f 取向量场 v，代入(1.68)式得到

$$I(v, v) = \int_M \langle -\nabla^2 v - R^{S^n}(f_* e_i, v) f_* e_i, v \rangle * 1.$$

考虑到(1.70)式和(1.71)式以及 S^n 的曲率张量表达式

$$\langle R^{S^n}(f_* e_i, v) f_* e_i, v \rangle = 2e(f)|v|^2 - \langle f_* e_i, v \rangle \langle f_* e_i, v \rangle,$$

我们有

$$\begin{aligned} I(v, v) &= \int_M (\langle \nabla v, \nabla v \rangle + \langle f_* e_i, v \rangle \langle f_* e_i, v \rangle \\ &\quad - 2e(f)|v|^2) * 1 \\ &= \int_M \Big[2(\langle \alpha, x \rangle^2 - \sum_A \langle \alpha, \varepsilon_A \rangle^2) e(f) \\ &\quad + \langle f_* e_i, v \rangle \langle f_* e_i, v \rangle \Big] * 1, \end{aligned}$$

其中 ε_A 是 S^n 上的局部幺正标架场。注意到

$$\operatorname{trace} \langle \alpha, x \rangle^2 = 1,$$

$$\operatorname{trace} \sum_A \langle \alpha, \varepsilon_A \rangle^2 = n,$$

$$\operatorname{trace} \langle f_* e_i, v \rangle \langle f_* e_i, v \rangle = 2e(f),$$

我们得到

$$\operatorname{trace} I(v, v) = 2(2-n) \int_M e(f) \leqslant 0,$$

它迫使 f 为常值映照. ∎

定理1.24和定理1.25也可看为非常值调和映照指标数为正的结论。如果再检查一下定理1.24的证明，事实上可以得到下述结论。

定理1.26[31] 设 $n>2$，f 是从 S^n 到任何 Riemann 流形的最大秩数为 k 的调和映照，如果 $k\geqslant 1$，那末，$\operatorname{index}(f)\geqslant k+1$.

定理1.24和定理1.25中的球面可以推广为欧氏空间中的一类子流形或球面中的一类子流形，或者是 δ 挤压流形，具体结果见文献[124]、[88]、[89]、[90]、[74]、[57]和[83]，其中特别值得指出的是具有这种性质的流形不一定同胚于球。在紧致不可约对称空间中只可能是[82],[57]

(1) 单连通单纯李群 $(A_n)_{n>1}$; $B_2=C_2$; $(C_n)_{n\geqslant 3}$;

(2) $SU(2n)/Sp(n)\ (n\geqslant 3)$;

(3) 球面 $S^n(n\geqslant 3)$;

(4) 四元 Grassmann 流形 $Sp(p+q)/Sp(p)\times Sp(q)\ (p\geqslant q\geqslant 1)$;

(5) E_6/F_4;

(6) Cayley 平面 $F_4/\mathrm{Spin}(9)$.

与此有关的结果请参见后面第5章中§5.4的讨论。

第 2 章

守 恒 律

在变分法中，泛函积分如果有连续的单参数对称群，那末，根据著名的 Noether 定理，对每个这样的对称性，就一定有一个守恒律，或叫做积分泛函的欧拉-拉格朗日方程的首积分。对Riemann流形间的光滑映照，Baird 和 Eells 写出了它的应力-能量张量，并且研究了它在调和映照理论中的应用[6]。本章将展开这方面的内容。

§2.1 应力-能量张量及守恒律

设 $f: (M, g) \to (N, h)$ 是光滑映照。众所周知 $e(f)$ 和 f^*h 分别为 f 的能量密度与第一基本形式。它的应力-能量张量定义为

$$S_f = e(f)g - f^*h, \tag{2.1}$$

它是M上的二阶对称张量。简单的计算可以证明下列结果。

定理 2.1[6]

$$\operatorname{div} S_f = -\langle \tau(f), df \rangle, \tag{2.2}$$

其中 τ 是映照 $f: (M, g) \to (N, h)$ 的张力场。

证明 与通常一样，取任何一点 $p \in M$ 附近的局部幺正法标架场$\{e_i\}$，那末，对任何 $X \in T_pM$,

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} S_f)(X) &= (\nabla_{e_i} S_f)(e_i, X)\\ &= \nabla_{e_i} S_f(e_i, X) - S_f(\nabla_{e_i} e_i, X) - S_f(e_i, \nabla_{e_i} X)\\ &= \nabla_{e_i}\left(\frac{1}{2}\langle f_* e_j, f_* e_j\rangle\langle e_i, X\rangle - \langle f_* e_i, f_* X\rangle\right)\\ &\quad - e(f)\langle e_i, \nabla_{e_i} X\rangle + \langle f_* e_i, f_* \nabla_{e_i} X\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \nabla_X f_* e_i, f_* e_i \rangle + e(f)\langle e_i, \nabla_{e_i} X\rangle \\
&\quad - \langle \nabla_{e_i} f_* e_i, f_* X\rangle - \langle f_* e_i, \nabla_{e_i} f_* X\rangle \\
&\quad - e(f)\langle e_i, \nabla_{e_i} X\rangle + \langle f_* e_i, f_* \nabla_{e_i} X\rangle \\
&= \langle (\nabla_X df) e_i, f_* e_i\rangle - \langle (\nabla_{e_i} df) e_i, f_* X\rangle \\
&\quad - \langle f_* e_i, (\nabla_{e_i} df) X\rangle \\
&= -\langle \tau(f), f_* X\rangle. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

这就证明了定理。

定义 2.2 对光滑映照 $f: (M, g)\to(N, h)$，如果它使$\operatorname{div} S_f\equiv 0$，那么称 f 满足守恒律。

推论 2.3 调和映照必满足守恒律。

反过来，满足守恒律的映照不一定是调和映照。事实上，我们可考虑另一类也满足守恒律的映照。

定义 2.4 对光滑映照 $f: (M, g)\to(N, h)$，如果，对任何 $X\in\Gamma(TM)$，$\nabla_X f^*h=0$，那末，f 称为相对仿射映照。

当 $f^*h=g$ 时，f 称为等距浸入，所以，相对仿射映照是等距浸入的自然推广。这个概念是在文献[67]中引入的。更一般地，如果存在M上的函数 $\lambda^2\geqslant 0$，使 $f^*h=\lambda^2 g$，则 f 称为弱共形映照。当 λ 为非零常数时，f 称为相似映照。

不难验证，f 是相对仿射映照的充要条件是对任何 X，Y，$Z\in\Gamma(TM)$，有

$$
\langle B_{XY}(f), f_* Z\rangle \equiv 0. \tag{2.3}
$$

事实上，

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X f^*h)(Y, Z) &= \nabla_X f^*h(Y, Z) - f^*h(\nabla_X Y, Z) \\
&\quad - f^*h(Y, \nabla_X Z) \\
&= \nabla_X\langle f_* Y, f_* Z\rangle - \langle f_*\nabla_X Y, f_* Z\rangle \\
&\quad - \langle f_* Y, f_* \nabla_X Z\rangle \\
&= \langle (\nabla_X df) Y, f_* Z\rangle + \langle f_* Y, (\nabla_X df) Z\rangle \\
&= \langle B_{XY}(f), f_* Z\rangle + \langle B_{XZ}(f), f_* Y\rangle,
\end{aligned}
$$

因此，(2.3)式为相对仿射映照充分性由此可得。反之，若 f 为相对仿射映照，从上式可得

$$\langle B_{XY}(f),\ f_*Z\rangle + \langle B_{XZ}(f),\ f_*Y\rangle = 0.$$

考虑到第二基本形式 $B_{XY}(f)$ 关于 X, Y 的对称性即得(2.3)式。由此可见，相对仿射映照也是全测地映照的推广。并且它必满足守恒律。

相对仿射映照不一定是调和映照。这样的例子是存在的。考虑球面 S^{n+1} 中非极小的 Clifford 超曲面

$$S^p\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)\times S^q\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right),$$

$\lambda>0$, $p+q=n$。它的高斯映照一定是相对仿射映照。事实上，球面 S^{n+1} 中任一紧致具相对仿射高斯映照的超曲面一定是 Clifford 超曲面。具体请见文献[140]。

还有下列关于应力-能量张量的简单性质。

命题 2.5 设 $f:(M, g)\to(N, h)$ 是非常值映照，那末，$S_f\equiv 0$ 的充要条件是 $\dim M=2$ 并且 f 是弱共形映照。

命题 2.6 设 $\dim M=m>2$, $f:(M, g)\to(N, h)$ 是弱共形映照，那末，f 是相似映照的充要条件是它满足守恒律。

这些命题请读者自行验证。

为了进一步应用应力-能量张量来研究调和映照，我们来推导它的一些基本公式。

设 $X\in\Gamma(TM)$ 是任一向量场，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(e(f)X) &= (\nabla_{e_i}e(f))\langle X,\ e_i\rangle + e(f)\langle\nabla_{e_i}X,\ e_i\rangle\\ &=\nabla_X e(f)+e(f)\langle\nabla X,\ g\rangle,\end{aligned}$$

其中 $\{e_i\}$ 是 M 上局部幺正法标架场，

$$\nabla X(e_i,\ e_j)\overset{\text{def}}{=\!=}\langle\nabla_{e_i}X,\ e_j\rangle.$$

又考虑到

$$\begin{aligned}\nabla_X e(f) &= \frac{1}{2}\nabla_X\langle f_*e_i,\ f_*e_i\rangle\\ &=\langle\nabla_X f_*e_i,\ f_*e_i\rangle\\ &=\langle(\nabla_X df)e_i,\ f_*e_i\rangle\\ &=\langle(\nabla_{e_i}df)X,\ f_*e_i\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \nabla_{e_i} f_* X, f_* e_i \rangle - \langle f_* \nabla_{e_i} X, f_* e_i \rangle \\
&= \nabla_{e_i} \langle f_* X, f_* e_i \rangle - \langle f_* X, (\nabla_{e_i} df) e_i \rangle \\
&\quad - \langle \nabla_{e_i} X, e_j \rangle \langle f_* e_i, f_* e_j \rangle \\
&= \operatorname{div}(\langle f_* X, f_* e_i \rangle e_i) - \langle f_* X, \tau(f) \rangle \\
&\quad - \langle \nabla X, f^* h \rangle,
\end{aligned}
$$

代入前一式，得到

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(e(f) X) = \operatorname{div}(\langle f_* X, f_* e_i \rangle e_i) \\
- \langle f_* X, \tau(f) \rangle + \langle S_f, \nabla X \rangle.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

如果X的支集 Supp$X$ 是紧致的，将(2.4)式积分，由 Green 定理和定理 2.1 立即得到

$$
\int_M (\operatorname{div} S_f)(X) * 1 + \int_M \langle S_f, \nabla X \rangle * 1 = 0. \tag{2.5}
$$

现在，我们取M中的一个紧致区域 $D \subseteq M$，它的边界 ∂D 是M中的光滑超曲面。沿 ∂D 取M的局部幺正标架场，使 $e_1, \cdots, e_{m-1} \in \Gamma(T\partial D)$，而 e_m 是 ∂D 的法向量 n。由 Green 定理

$$
\int_D (\operatorname{div} X) * 1 = \int_{\partial D} \langle X, n \rangle * 1,
$$

因此，将(2.4)式在D上积分，得到

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial D} e(f) \langle X, n \rangle * 1 = \int_{\partial D} \langle f_* X, f_* n \rangle + \int_D (\operatorname{div} S_f)(X) * 1 \\
+ \int_D \langle S_f, \nabla X \rangle * 1,
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

式(2.5)和(2.6)是二个重要的公式，我们将用它们来证明一系列结果。

§2.2 单调不等式

设M是m维 Riemann 流形，$B_\sigma(x)$是M中以x为中心，σ为半径的测地球。假定从某点 $x_0 \in M$ 到它割迹及到M边界的距离至少为 1。

定理 2.7[129] 设 $f: M\to N$ 是调和映照。那末，对任何 $x\in B_{\frac{1}{2}}(x_0)$ 和 $0<\sigma\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{2}$，有下列单调不等式

$$e^{CA\sigma}\sigma^{2-m}\int_{B_\sigma(x)} e(f)*1\leqslant e^{CA\rho}\rho^{2-m}\int_{B_\rho(x)} e(f)*1 \qquad (2.7)$$

其中 C 是只依赖于 m 的常数，而 A 是依赖于截曲率在 $B_1(x_0)$ 中上、下界的常数。

证明 设 r 是 $B_{\frac{1}{2}}(x)$ 中从 x 点出发的距离函数，$\frac{\partial}{\partial r}$ 是单位径向向量场。令

$$X=\xi r\frac{\partial}{\partial r},$$

其中 $\xi(r)$ 将在后面确定。我们从(2.5)式来导出(2.7)式。

在所考虑点附近取局部幺正标架场 $\left\{e_\alpha, \frac{\partial}{\partial r}\right\}(\alpha=1, \cdots, m-1)$，那末

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}X=(\xi' r+\xi)\frac{\partial}{\partial r},$$

并且

$$\begin{aligned}\nabla_{e_\alpha}X&=\xi r\nabla_{e_\alpha}\frac{\partial}{\partial r}=\xi r\left(\left\langle\nabla_{e_\alpha}\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle\frac{\partial}{\partial r}\right.\\&\qquad\left.+\left\langle\nabla_{e_\alpha}\frac{\partial}{\partial r}, e_\beta\right\rangle e_\beta\right)\\&=\xi r\mathrm{Hess}(r)(e_\alpha, e_\beta)e_\beta,\end{aligned}$$

这里 Hess(·)表示 Hessian 算子。

如果在 $B_1(x_0)$ 中的截曲率大小在 $[a, b]$ 之间，那末，应用 Hessian 比较定理

$$\sqrt{|b|}F(\sqrt{b}\,r)\leqslant\mathrm{Hess}(r)(e_\alpha, e_\alpha)\leqslant\sqrt{|a|}F(\sqrt{|a|}\,r),$$

其中

$$\sqrt{|c|}\,rF(\sqrt{|c|}\,r)=\begin{cases}\sqrt{c}\,r\mathrm{ctg}(\sqrt{c}\,r), & c>0\\1, & c=0\\\sqrt{-c}\,r\coth(\sqrt{-c}\,r), & c<0\end{cases}$$

而

$$|\sqrt{|c|}\,rF(\sqrt{|c|}\,r)-1|\leqslant rA. \tag{2.8}$$

所以，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}X&=\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}X,\ \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle+\langle\nabla_{e_\alpha}X,\ e_\alpha\rangle\\&\geqslant\xi' r+\xi+\xi(m-1)\sqrt{|b|}\,rF(\sqrt{|b|}\,r),\end{aligned}\tag{2.9}$$

和

$$\begin{aligned}\langle f^*h,\ \nabla X\rangle&=\langle f_*e_\alpha,\ f_*e_\beta\rangle\langle\nabla_{e_\alpha}X,\ e_\beta\rangle\\&\quad+\left\langle f_*\frac{\partial}{\partial r},\ f_*\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}X,\ \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle\\&=\xi r\operatorname{Hess}(r)(e_\alpha,\ e_\beta)\langle f_*e_\alpha,\ f_*e_\beta\rangle\\&\quad+(\xi' r+\xi)\left\langle f_*\frac{\partial}{\partial r},\ f_*\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle\\&\leqslant\xi r\langle f_*e_\alpha,\ f_*e_\alpha\rangle\sqrt{|a|}\,F(\sqrt{|a|}\,r)\\&\quad+(\xi' r+\xi)\left\langle f_*\frac{\partial}{\partial r},\ f_*\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle\\&=\xi r|df|^2\sqrt{|a|}\,F(\sqrt{|a|}\,r)\\&\quad+\xi' r\left\langle f_*\frac{\partial}{\partial r},\ f_*\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle\\&\quad+\xi(1-r\sqrt{|a|}\,F(\sqrt{|a|}\,r))\left\langle f_*\frac{\partial}{\partial r},f_*\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle\end{aligned}\tag{2.10}$$

将(2.9)式和(2.10)式代入(2.5)式得到

$$\begin{aligned}0\geqslant\int_M&[\xi' re(f)-(2-m)\xi e(f)+(m\\&-1)\xi(\sqrt{|b|}\,rF(\sqrt{|b|}\,r)-1)e(f)+2\xi(1\\&-\sqrt{|a|}\,rF(\sqrt{|a|}\,r)e(f)-\xi' r\left|f_*\frac{\partial}{\partial r}\right|^2\\&-\xi(1-\sqrt{|a|}\,rF(\sqrt{|a|}\,r)\left|f_*\frac{\partial}{\partial r}\right|^2]*1\end{aligned}$$

注意到(2.8)式，我们有

$$-\int_M \xi' r e(f)*1+(2-m)\int_M \xi e(f)*1+(m+1)\Lambda\int_M \xi r e(f)*1$$
$$\geqslant -\int_M \xi' r\left|f_*\frac{\partial}{\partial r}\right|^2*1+\int_M \xi(\sqrt{|a|}rF(\sqrt{|a|}r)$$
$$-1)\left|f_*\frac{\partial}{\partial r}\right|^2*1, \tag{2.11}$$

取光滑函数

$$\phi(r)=\begin{cases}1, & \text{当 } r\in[0,1]\\ 0, & \text{当 } r\in[1+\varepsilon,\infty)\end{cases}$$

并且 $\phi'\leqslant 0$，其中 $\varepsilon>0$ 是任一足够小的正数。对 $\tau\in[\sigma,\rho]$，令

$$\xi(r)=\xi_\tau(r)=\phi\left(\frac{r}{\tau}\right),$$

那末

$$\tau\frac{\partial}{\partial\tau}(\xi_\tau(r))=-\gamma\xi'_\tau(r),$$

并且

$$\xi_\tau r=\phi\left(\frac{r}{\tau}\right)r\leqslant\phi\left(\frac{r}{\tau}\right)\tau(1-\varepsilon)=\xi_\tau(1+\varepsilon)\tau.$$

将上述有关式子代入(2.11)式

$$\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\int_M \xi_\tau e(f)*1+(2-m)\int_M \xi_\tau e(f)*1$$
$$+C\tau\Lambda\int_M \xi_\tau e(f)*1\geqslant 0,$$

其中 $C=(1+\varepsilon)(m+1)$，它意味着

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(e^{C\Lambda\tau}\tau^{2-m}\int_M \xi_\tau e(f)*1\right)\geqslant 0.$$

即得我们要证明的不等式(2.7)。 ▮

注 从单调不等式可以证明调和映照的刘维尔型定理。如某种几何条件使 Λ 为零，并能确保单调不等式当测地球半径趋向于∞时一直成立，那末，对应的刘维尔型定理就可以得到。下节将研究这样的问题。

§2.3　守恒律在刘维尔型定理中的应用

物理学家首先证明了欧氏空间 $R^n(n\geqslant3)$ 到球面的任何有限能量的调和映照一定是常值映照[36]。Eells 和 Lemaire 指出，这定理对任何象流形都成立。随后，Sealey 证明了出发流形可以为欧氏空间 R^n 和 $H^n(n\geqslant3)$[106]，我们来证明下列更一般的结果。

定理 2.8[130]　设 M 是完备、单连通且非正截曲率的 m 维 Riemann 流形，它的截曲率变化不大(具体范围见下面证明)。设 f 是从 M 到任何 Riemann 流形的调和映照。如果 $m>2$，并且 f 的能量慢发散(确切意义在下面证明中交待)，那末，f 必是常值映照。

证明　我们在公式(2.6)中设 $D=B_R(x_0)$ 为以 x_0 为中心，R 为半径的测地球。显然，从 x_0 出发的距离函数 r 的平方是 M 上的光滑函数。再在公式(2.6)中取 $X=r\frac{\partial}{\partial r}$，其中 $\frac{\partial}{\partial r}$ 表示单位径向向量场。显然 $\partial B_R(x_0)$ 的单位法向量 $n=\frac{\partial}{\partial r}$。我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial B_R(x_0)} e(f)\langle X,\ n\rangle *1-\int_{\partial B_R(x_0)}\langle f_*X,\ f_*n\rangle *1\\
&=\int_{\partial B_R(x_0)} Re(f)*1-\int_{\partial B_R(x_0)} R\left\langle f_*\frac{\partial}{\partial r},\ f_*\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle *1\\
&\leqslant R\int_{\partial B_R(x_0)} e(f)*1.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

另一方面，

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}X&=\frac{\partial}{\partial r},\\
\nabla_{e_s}X&=r\nabla_{e_s}\frac{\partial}{\partial r}\\
&=r\mathrm{Hess}(r)(e_s,\ e_t)e_t,\\
\mathrm{div}\,X&=1+r\mathrm{Hess}(r)(e_s,\ e_s),
\end{aligned}
$$

其中 $\{e_\alpha\}=\left\{e_s,\ \frac{\partial}{\partial r}\right\}$ 是 $B_R(x_0)$ 上的局部幺正标架场。所以，

$$\langle f_*e_\alpha, f_*e_\beta\rangle\langle\nabla_{e_\alpha}X, e_\beta\rangle$$
$$= r\mathrm{Hess}(r)(e_s, e_t)\langle f_*e_s, f_*e_t\rangle + \left\langle f_*\frac{\partial}{\partial r}, f_*\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle,$$

并且

$$\begin{aligned}\langle S_f, \nabla X\rangle &= e(f)\mathrm{div}X - \langle f_*e_\alpha, f_*e_\beta\rangle\langle\nabla_{e_\alpha}X, e_\beta\rangle\\ &= e(f)(1 + r\,\mathrm{Hess}(r)(e_s, e_s)) - \left|f_*\frac{\partial}{\partial r}\right|^2\\ &\quad - r\mathrm{Hess}(r)(e_s, e_t)\langle f_*e_s, f_*e_t\rangle.\end{aligned} \tag{2.13}$$

下面就出发流形的曲率分下列二种情形考虑

(1) $-a^2\leqslant k\leqslant -b^2<0$, a, b 是正常数;

(2) $-\dfrac{A}{1+\gamma^2}\leqslant k\leqslant 0$, A 是另一正常数。

对(1)，根据 Hessian 比较定理

$$\begin{aligned}\langle S_f, \nabla f\rangle &\geqslant e(f)[1+(m-1)(br)\coth(br)]\\ &\quad - \left|f_*\frac{\partial}{\partial r}\right|^2 - (ar)\coth(ar)\langle f_*e_s, f_*e_s\rangle\\ &= \left(\frac{m-1}{2}(br)\coth(br) - \frac{1}{2}\right)\left|f_*\frac{\partial}{\partial r}\right|^2\\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + \frac{m-1}{2}(br)\coth(br)\right.\\ &\quad \left. - (ar)\coth(ar)\right)\langle f_*e_s, f_*e_s\rangle\\ &\geqslant \frac{m-2}{2}\left|f_*\frac{\partial}{\partial r}\right|^2 + \left[\frac{1}{2} + r\cdot\coth(br)\left(\frac{m-1}{2}b\right.\right.\\ &\quad \left.\left. - a\right)\right]\langle f_*e_s, f_*e_s\rangle\\ &\geqslant \delta e(f),\end{aligned} \tag{2.14}$$

其中 $\delta>0$, 如取 $\dfrac{m-1}{2}b-a\geqslant 0$。

对(2)，同样由 Hessian 比较定理[39]

$$\frac{1}{r}(g - dr\otimes dr \leqslant \mathrm{Hess}(r) \leqslant \frac{\beta}{r}(g - dr\otimes dr),$$

其中

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+4A)^{\frac{1}{2}}.$$

从(2.13)式得到

$$\begin{aligned}\langle S_f, \nabla X\rangle &> me(f) - \left|f_*\frac{\partial}{\partial r}\right|^2 - \beta\langle f_*e_s, f_*e_s\rangle \\ &= \left(\frac{m}{2}-1\right)\left|f_*\frac{\partial}{\partial r}\right|^2 + \left(\frac{m}{2}-\beta\right)\langle f_*e_s, f_*e_s\rangle \\ &\geqslant \delta e(f), \end{aligned} \tag{2.15}$$

其中 $\delta>0$，如取 $A\leqslant(1-\varepsilon)^2-\dfrac{1}{4}$。

总之，从(2.6)式、(2.12)式、(2.14)式和(2.15)式，我们总有

$$R\int_{\partial B_R(x_0)} e(f) \geqslant \int_{B_R(x_0)} \delta e(f) * 1.$$

如果 $e(f)$ 不恒等于零，总存在 $R_0>0$，使 $R>R_0$ 时，

$$\int_{B_R(x_0)} e(f) * 1 \geqslant C,$$

这里 C 是正常数。从而得到

$$\int_{\partial B_R(x_0)} e(f) * 1 \geqslant \frac{\delta C}{R}. \tag{2.16}$$

我们现在假定 f 的能量慢发散，即存在满足

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{dr}{r\psi(r)} = \infty,$$

$(R_0>0)$ 的正函数 $\psi(r)$，使

$$\lim_{R\to\infty}\int_{B_R(x_0)} \frac{e(f)(x)}{\psi(r(x))} * 1 < \infty.$$

此时(2.16)式意味着

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{B_R(x_0)} \frac{e(f)(x)}{\psi(r(x))} * 1 &= \int_0^{\infty} \frac{dR}{\psi(R)} \int_{\partial B_R(x_0)} e(f) * 1 \\ &\geqslant \delta C \int_0^{\infty} \frac{dR}{R\psi(R)} \\ &\geqslant \delta C \int_{R_0}^{\infty} \frac{dR}{R\psi(R)} = \infty, \end{aligned}$$

这和 f 的能量慢发散相矛盾。所以 f 一定是常值映照。 ∎

注 1 在定理中的流形 M 是 Cartan-Hadamard 流形。从证明可以看出，我们只要假定 M 有极点，并且关于该极点的径向曲率非正并且"变化不大"，那末，定理一样成立。

注 2 定理中假定 f 是调和映照. 事实上, 只要假定它满足守恒律, 甚至只要应力-能量张量满足更一般的关系式即可。

注 3 Sealey 等人是在能量有限的假定下证明相应定理的。在文献[59]中, 胡和生将能量条件减弱为慢发散. 本定理证明中应用了文献[59]中的这个技巧。

注 4 对复双曲空间 CH^m, 它的截曲率变化范围为 $-4\leqslant k\leqslant -1$, 从前面证明可以看出, 当 $m\geqslant 3$ 时, 相应的定理成立. 在文献[103]中, 由直接计算得到, 定理对 $m=2$ 也成立。

§2.4 推广和进一步结果

众所周知调和映照理论是调和 1-形式理论的非线性推广, 而 Yang-Mills 场理论是调和 2-形式理论的非线性推广. 因此, 一般地研究向量丛值的调和 p-形式也是有意义的。

设 M 是 Riemann 流形, E 是 M 上的 Riemann 向量丛. 设 ω 是取值于 E 的 p-形式. 它可以看成向量丛 $\Lambda^pT^*M\otimes E$ 上的一个截面. 类似地, 我们也可引入应力-能量张量.

对 p-形式 ω, 它的对称平方 $\omega\odot\omega$ 定义如下:

$$\omega\odot\omega(X,\ Y)=\langle i_X\omega,\ i_Y\omega\rangle, \tag{2.17}$$

其中 $X,\ Y\in\Gamma(TM)$, 而 $i_X\omega$ 表示 p-形式与向量场 X 的内积, 它是 $(p-1)$-形式. 对任何 $X_1,\ \cdots,\ X_{p-1}\in\Gamma(TM)$, $i_X\omega\overset{\text{def}}{=\!=}\omega(X,\ X_1,\ \cdots,\ X_{p-1})$. 这样, 对 p-形式 ω, 它的应力-能量张量定义为

$$S_\omega=\frac{1}{2}|\omega|^2g-\omega\odot\omega, \tag{2.18}$$

其中 g 是 M 上的度量张量. S_ω 也可以看成取值于 T^*M 的 1-形式. 下面来推导它的基本公式.

假定 X 是 M 上的向量场, $\{e_i\}$ 是在点 $x\in M$ 附近的局部么正标架场, 且满足 $\nabla_{e_i}e_j|_x=0$.

引理 2.9

$$\left\langle \operatorname{grad}\frac{1}{2}\langle\omega,\ \omega\rangle,\ X\right\rangle=\langle i_Xd\omega+di_X\omega,\ \omega\rangle$$

$$-\sum_{i_1<\cdots<i_p}\langle\sum_j\omega(e_{i_1},\cdots,\nabla_{e_{i_j}}X,\cdots,e_{i_p}),\ \omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_p})\rangle. \tag{2.19}$$

证明 在 x 点,

左边 $=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\langle\nabla_X\omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_p}),\ \omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_p})\rangle$

$=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\langle(\nabla_X\omega)(e_{i_1},\cdots,e_{i_p})+(-1)^j(\nabla_{e_{i_j}}\omega)(X,e_{i_1},\cdots,\hat{e}_{i_j},\cdots,e_{i_p})$

$-(-1)^j(\nabla_{e_{i_j}}\omega)(X,e_{i_1},\cdots,\hat{e}_{i_j},\cdots,e_{i_p}),\ \omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_p})\rangle$

$=\langle i_Xd\omega,\ \omega\rangle-\langle\sum_{i_1<\cdots<i_p}(-1)^j\nabla_{e_{i_j}}\omega(X,e_{i_1},\cdots,\hat{e}_{i_j},\cdots,e_{i_p})$

$+(-1)^j\omega(\nabla_{e_{i_j}}X,e_{i_1},\cdots,\hat{e}_{i_j},\cdots,e_{i_p}),\ \omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_p})\rangle$

$=\langle i_Xd\omega+di_X\omega,\ \omega\rangle-\sum_{i_1<\cdots<i_p}\langle\sum_j\omega(e_{i_1},\cdots,\nabla_{e_{i_j}}X,\cdots e_{i_p}),\ \omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_p})\rangle.$ ∎

引理 2.10

$$\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_j\langle\omega(e_{i_1},\cdots,\nabla_{e_{i_j}}X,\cdots,e_{i_p}),\ \omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_p})\rangle$$
$$=\langle\omega\odot\omega,\ \nabla X\rangle,$$

其中 ∇X 可看成取值于 T^*M 的 1-形式,定义为

$$\nabla X(e_i)(e_j)=\langle\nabla_{e_i}X,\ e_j\rangle.$$

证明 在 x 点,

左边 $=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_j\langle\omega(\nabla_{e_{i_j}}X,e_{i_1},\cdots,\hat{e}_{i_j},\cdots,e_{i_p}),\ \omega(e_{i_j},e_{i_1},\cdots,\hat{e}_{i_j},\cdots,e_{i_p})\rangle$

$=\sum_{j_1<\cdots<j_{p-1}}\sum_i\langle\omega(\nabla_{e_i}X,e_{j_1},\cdots,e_{j_{p-1}}),\ \omega(e_i,e_{j_1},\cdots,e_{j_{p-1}})\rangle$

$=(\sum_{j_1<\cdots<j_{p-1}}\langle\omega(e_k,e_{j_1},\cdots,e_{j_{p-1}}),\ \omega(e_i,e_{j_1},\cdots,e_{j_{p-1}})\rangle)\langle\nabla_{e_i}X,\ e_k\rangle$

$=\langle i_{e_k}\omega,\ i_{e_i}\omega\rangle\langle\nabla_{e_i}X,\ e_k\rangle=$ 右边. ∎

命题 2.11

$$(\mathrm{div}S_\omega)(X)=\langle\delta\omega,\ i_X\omega\rangle+\langle i_Xd\omega,\ \omega\rangle. \tag{2.20}$$

证明 由引理 2.9 和引理 2.10,

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=(\nabla_{e_i}S_\omega)(e_i,\ X)=\nabla_{e_i}S_\omega(e_i,\ X)-S_\omega(e_i,\ \nabla_{e_i}X)\\
&=\nabla_{e_i}\Big(\frac{1}{2}|\omega|^2\langle e_i,\ X\rangle-\langle i_{e_i}\omega,\ i_X\omega\rangle\Big)\\
&\quad-\frac{1}{2}|\omega|^2\langle e_i,\nabla_{e_i}X\rangle+\langle i_{e_i}\omega,\ i_{\nabla_{e_i}X},\ \omega\rangle\\
&=\frac{1}{2}\nabla_X\langle\omega,\ \omega\rangle-\sum_{j_1<\cdots<j_{p-1}}\langle\nabla_{e_i}(i_{e_i}\omega)(e_{j_1},\\
&\qquad\cdots,\ e_{j_{p-1}}),\ (i_X\omega)(e_{j_1},\ \cdots,\ e_{j_{p-1}})\rangle\\
&\quad-\sum_{j_1<\cdots<j_{p-1}}\langle(i_{e_i}\omega)(e_{j_1},\ \cdots,\ e_{j_{p-1}}),\ \nabla_{e_i}(i_X\omega)(e_{j_1},\\
&\qquad\cdots,\ e_{j_{p-1}})+\langle i_{e_i}\omega,\ i_{\nabla e_iX}\omega\rangle\\
&=\langle i_Xd\omega+di_X\omega,\ \omega\rangle-\langle\omega\odot\omega,\ \nabla X\rangle+\langle\delta\omega,\ i_X\omega\rangle\\
&\quad-\sum_{j_1<\cdots<j_{p-1}}\langle\omega(e_i,\ e_{j_1},\ \cdots,\ e_{j_{p-1}}),\ (\nabla_{e_i}\omega)(X,\ e_{j_1},\\
&\qquad\cdots,\ e_{j_{p-1}})\rangle,
\end{aligned}\tag{2.21}$$

而且

$$\begin{aligned}
&\langle\omega\odot\omega,\ \nabla X\rangle+\sum_{j_1<\cdots<j_{p-1}}\langle\omega(e_i,\ e_{j_1},\\
&\qquad\cdots,\ e_{j_{p-1}}),\ (\nabla_{e_i}\omega)(X,\ e_{j_1},\ \cdots,\ e_{j_{p-1}})\rangle\\
&=\sum_{j_1<\cdots<j_{p-1}}\langle\omega(\nabla_{e_i}X,\ e_{j_1},\ \cdots,\ e_{j_{p-1}}),\ \omega(e_i,\ e_{j_1},\ \cdots,\ e_{j_{p-1}})\rangle\\
&\quad+\sum_{j_1<\cdots<j_{p-1}}\langle\omega(e_i,\ e_{j_1},\ \cdots,\ e_{j_{p-1}}),\ (\nabla_{e_i}\omega)(X,\ e_{j_1},\\
&\qquad\cdots,\ e_{j_{p-1}})\rangle\\
&=\sum_{j_1<\cdots<j_{p-1}}\langle\nabla_{e_i}\omega(X,\ e_{j_1},\ \cdots,\ e_{j_{p-1}}),\ \omega(e_i,\ e_{j_1},\ \cdots,\ e_{j_{p-1}})\rangle\\
&=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{1\le j\le p}\langle\nabla_{e_{i_j}}\omega(X,\ e_{i_1},\ \cdots,\ \hat{e}_{i_j},\ \cdots,\ e_{i_p}),\ \omega(e_{i_j},\ e_{i_1},\\
&\qquad\cdots,\ \hat{e}_{i_j},\ \cdots,\ e_{i_p})\rangle\\
&=\sum_{i_1<\cdots<i_p}(-1)^{j-1}\langle\nabla_{e_{i_j}}\omega(X,\ e_{i_1},\ \cdots,\ \hat{e}_{i_j},\ \cdots,\ e_{i_p}),\ \omega(e_{i_1},\\
&\qquad\cdots,\ e_{i_p})\rangle\\
&=\sum_{i_1<\cdots<i_p}(-1)^{j-1}\langle\nabla_{e_{i_j}}i_X\omega(e_{i_1},\ \cdots,\ \hat{e}_{i_j},\ \cdots,\ e_{i_p}),\ \omega(e_{i_1},\\
&\qquad\cdots,\ e_{i_p})\rangle
\end{aligned}$$

$= \langle di_X\omega,\ \omega\rangle$。

将上式代入(2.21)式即得(2.20)式。 ∎

命题 2.12 如果M中的向量场X有紧致支集，那末

$$\int_M (\mathrm{div}S_\omega)(X)*1+\int_M\langle S_\omega,\ \nabla X\rangle*1=0. \tag{2.22}$$

证明 注意到$\mathrm{div}\,X=\langle\nabla X,\ g\rangle$，从引理2.9和引理2.10，

$$\mathrm{div}\left(\frac{1}{2}|\omega|^2X\right)=\langle i_Xd\omega+di_X\omega,\ \omega\rangle+\langle S_\omega,\ \nabla X\rangle,$$

将它积分，利用d和δ的对偶性，并且考虑到命题2.11，我们就有(2.22)式。 ∎

取M中的紧致区域$D\subseteq M$，使它的边界∂D是M中的光滑超曲面，它的单位法向为n，那末有下列公式

$$\int_{\partial D}\frac{1}{2}|\omega|^2\langle X,\ n\rangle*1=\int_D(\mathrm{div}S_\omega)(X)*1+\int_D\langle S_\omega,\ \nabla X\rangle*1$$
$$+\int_{\partial D}\langle i_X\omega,\ i_n\omega\rangle*1. \tag{2.23}$$

对取值于向量丛的p-形式ω，定义 Hodge-Laplace 算子为

$$\Delta=d\delta+\delta d.$$

ω如果在算子Δ的核空间就称为*调和形式*。如果ω是闭形式和余闭形式，那它一定是调和形式。如果ω使$\mathrm{div}S_\omega\equiv 0$，那末，我们称$\omega$满足守恒律。命题2.11说明闭且余闭的形式一定满足守恒律。

我们也可得到单调不等式，它的证明类似于定理2.7的证明。

定理 2.13[129] 设M是m维 Riemann 流形，$B_\sigma(x)$是M中以x为中心，σ为半径的测地球。假定从一点$x_0\in M$到它割迹且到M边界的距离至少为1。设$E\to M$是M上的向量丛，ω是取值于E的p-形式，满足条件

$$-\int_M(\mathrm{div}S_\omega)(X)*1\leqslant\frac{1}{2}(m+2p-1)\lambda\int_M|\omega|^2|X|*1,$$

其中X是M中具紧致支集的任一向量场，λ是常数，那末，

$$e^{c(\Lambda+\lambda)\rho}\rho^{2p-m}\int_{B_\rho(x)}|\omega|^2*1$$

$$\geqslant e^{c(A+\lambda)\rho}\sigma^{2p-m}\int_{B_\sigma(x)}|\omega|^2 * 1. \tag{2.24}$$

对任何 $x\in B_{\frac{1}{2}}(x_0)$ 和 $0<\sigma\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{2}$ 成立，其中 c 是只依赖于 m 和 p 的常数，A 是依赖于截曲率在 $B_1(x_0)$ 中的上下界的常数。

类似地，我们可用公式 (2.23) 证明 L^2-形式的消没定理如下。

定理 2.14 设 M 是 m 维完备、单连通的 Riemann 流形，它的截曲率非正，且变化不大。设 E 是 M 上的 Riemann 向量丛，ω 为 M 上取值于 E 的 p 次 L^2-形式，满足守恒律，那末当 $m>2p$ 时，$\omega\equiv 0$。

下面，我们再回到调和映照情形。定理 2.8 和定理 2.14 中截面曲率变化不大的条件也许并不是必要的。Sampson 曾试图证明，从任何 m 维 $(m\geqslant 3)$ 完备单连通具有负截曲率流形出发的有限能量的调和映照一定是常值映照，可惜证明有错[96]。他的结论究竟对不对，至今还不清楚。为此，我们考虑一类特殊的 Cartan-Hadamard 流形——典型域(有界对称域)。

典型域首先由 Cartan 所引入[12]、[13]。后来，被 Siegel、华罗庚和陆启铿所研究[107]、[61]、[62]、[76]。根据 Wong 的工作，典型域可以看成伪欧氏空间中类空子空间组成的伪 Grassmann 流形[119]。

设 C_m^{n+m} 是 $(n+m)$ 维复向量空间，对任何 $u=(x,y)=(x_1,\cdots,x_n;x_{n+1},\cdots,x_{n+m})\in C_m^{n+m}$，定义伪欧氏内积

$$\langle u,u\rangle=|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2-|x_{n+1}|^2-\cdots-|x_{n+m}|^2.$$

对 C_m^{n+m} 中的任一 n 维子空间 A，如果在 A 上的诱导内积为正定的，那末，A 称为 n 维类空子空间。C_m^{n+m} 中所有 n 维类空子空间全体记为 $G_{n,m}^m(C)$，称为伪 Grassmann 流形。

在 C_m^{n+m} 中任取 m 个线性独立单位类时向量，组成 $(n+m)\times m$ 矩阵 $\begin{pmatrix}V_+\\V_-\end{pmatrix}$，那末，$n$ 维类空子空间可由方程组

$$xV_+ - yV_- = 0$$

所定义。如果 $\det V_- = 0$，那末必存在类时向量 $(x, 0)$，这是不可能的。所以，任一 n 维类空子空间可由方程

$$y = xV_+V_-^{-1} \xlongequal{\text{def}} xZ$$

表示。这里 Z 是 $(n\times m)$ 复矩阵，对同一 n 维类空子空间，在全空间不同基底下，方程变为 $xV_+U - yV_-U = 0$，其中 U 是 $(m\times m)$ 非异阵，所以 Z 只依赖于 n 维类空子空间而不依赖于基底的选取。由于 (x, xZ) 对任何 x 为类空向量，Z 必须满足

$$I^{(n)} - Z\bar{Z}^{\tau} > 0. \tag{2.25}$$

所有满足(2.25)式的 $(n\times m)$ 复矩阵全体构成第一类典型域 $\mathscr{R}_I$。它看成伪 Grassmann 流形 $G^m_{n,m}(\mathbb{C})$。$\mathscr{R}_I$ 中的 Bergman 度量也恰好是 $G^m_{n,m}(\mathbb{C})$ 中的典范度量[119]。而第二、三类典型域 $\mathscr{R}_{II}$、$\mathscr{R}_{III}$ 是 $\mathscr{R}_I$ 中的全测地子流形。$\mathscr{R}_{IV}$ 则可看成 $G^2_{n,2}$ ——R^{n+2}_2 中 n 维类空子空间的全体。这样，我们容易用活动标架法算出典型域中的曲率张量，估计出截面曲率的界，以及 Ricci 曲率等。从文献[119]可知：

	维数	截面曲率的界	Ricci曲率
$\mathscr{R}_I(n, m)\ (\min(m, n)\geq 2)$	$2mn$	$-4\leqslant k\leqslant 0$	$-2(n+m)$
$\mathscr{R}_{II}(n\geq 2)$	$n(n+1)$	$-4\leqslant k\leqslant 0$	$-2(n+1)$
$\mathscr{R}_{III}(n\geq 4)$	$n(n-1)$	$-2\leqslant k\leqslant 0$	$-2(n-1)$
$\mathscr{R}_{IV}(n\geq 2)$	$2n$	$-2\leqslant k\leqslant 0$	$-n$

我们首先证明一个 Laplace 比较定理，它实质上是属于丁青的[28]，这不同于我们熟知的 Laplace 比较定理。这里给出的证明不同于文献[28]中的证明，它更为几何化，并稍作推广。

定理 2.15　设 M 和 $\widetilde{M}$ 都是 m 维完备 Riemann 流形，其中 M 还是单连通无焦点流形。设 r 和 $\tilde{r}$ 分别是从 $x_0\in M$ 以及 $\tilde{x}_0\in\widetilde{M}$ 出发的距离函数。如果，对任何点 $x\in M$，$\tilde{x}\in\widetilde{M}$，$r(x)=\tilde{r}(\tilde{x})\neq 0$，满足

$$\mathrm{Ric}(x)\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right)\leqslant\frac{1}{m-1}\widetilde{\mathrm{Ric}}(\tilde{x})\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{r}}\right),$$

其中 Ric 和 $\widetilde{\mathrm{Ric}}$ 分别表示M和$\widetilde{M}$中的 Ricci 曲率，那末，当$\tilde{x}$是 $\tilde{r}$ 的可微点时，

$$\Delta r \geqslant \frac{1}{m-1} \widetilde{\Delta} \tilde{r}.$$

特别地，当

$$\mathrm{Ric} \leqslant -b^2$$

时(b 是正常数)，那末

$$\Delta r \geqslant b \coth(br). \tag{2.26}$$

证明 设 X, Y 是M中以 x_0 为中心，r 为半径的测地球面 $\partial B_r(x_0)$的切向量场，并将它们沿径向测地线平行移动得到沿径向测地线的二个向量场。那末，

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \mathrm{Hess}(r)(X, Y) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left\langle \nabla_X \frac{\partial}{\partial r}, Y \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \nabla_X \frac{\partial}{\partial r}, Y \right\rangle \\
&= -\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial r}, X\right)\frac{\partial}{\partial r}, Y \right\rangle + \left\langle \nabla_{[\frac{\partial}{\partial r}, X]} \frac{\partial}{\partial r}, Y \right\rangle \\
&= -\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial r}, X\right)\frac{\partial}{\partial r}, Y \right\rangle - \left\langle \nabla_{\nabla_X \frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r}, Y \right\rangle \\
&= -\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial r}, X\right)\frac{\partial}{\partial r}, Y \right\rangle - \left\langle \nabla_Y \frac{\partial}{\partial r}, \nabla_X \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle,
\end{aligned}$$

将上式二端取迹，得到

$$\frac{d}{dr}(\Delta r) = -\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) - |\mathrm{Hess}(r)|^2 \tag{2.27}$$

M是完备单连通无焦点流形，r^2 是M上的光滑凸函数。(见后面命题 5.8)。考虑到

$$\mathrm{Hess}(r^2)\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 2,$$

$$\mathrm{Hess}(r^2)(X, Y) = 2r\mathrm{Hess}(r)(X, Y),$$

Hess(r)的特征值均非负，因而

$$|\mathrm{Hess}(r)|^2 \leqslant (\Delta r)^2.$$

(2.27)式化为

$$\frac{d}{dr}(\Delta r) \geqslant -\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) - (\Delta \gamma)^2. \qquad (2.28)$$

同样道理，在$\widetilde{M}$中有

$$\frac{d}{d\tilde{r}}(\widetilde{\Delta}\tilde{r}) = -\widetilde{\mathrm{Ric}}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{r}}\right) - |\mathrm{Hess}(\tilde{r})|^2. \qquad (2.29)$$

由 Schwarz 不等式，

$$|\mathrm{Hess}(\tilde{r})|^2 \geqslant \frac{1}{m-1}(\widetilde{\Delta}\tilde{r})^2,$$

(2.29)式也就化为

$$\frac{d}{dr}(\widetilde{\Delta}\tilde{r}) \leqslant \widetilde{\mathrm{Ric}}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{r}}\right) - \frac{1}{m-1}\widetilde{\Delta}\tilde{r}. \qquad (2.30)$$

从(2.28)式和(2.30)式并利用定理的条件得到

$$\frac{d}{dr}\left(\Delta r - \frac{1}{m-1}\widetilde{\Delta}\tilde{r}\right) \geqslant -(\Delta r)^2 + \frac{1}{(m-1)^2}(\widetilde{\Delta}\tilde{r})^2. \qquad (2.31)$$

记

$$H = \Delta r - \frac{1}{m-1}\widetilde{\Delta}\tilde{r},$$

$$P = \Delta r + \frac{1}{m-1}\widetilde{\Delta}\tilde{r},$$

那末，(2.31)式可记为

$$\frac{dH}{dr} + PH \geqslant 0, \qquad (2.32)$$

在 x_0 点附近建立法坐标$(x^1, \cdots, x^m)$，那末在法坐标邻域内

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2},$$

$$\Delta r = \frac{m-1}{r} + O(r),$$

同样，有

$$\widetilde{\Delta}\tilde{r} = \frac{m-1}{\tilde{r}} + O(\tilde{r}),$$

从而，得到

$$H = \frac{m-2}{r} + O(r).$$

这说明，当 $r\in(0,\ \varepsilon]$（ε 为充分小的正数）时，$H\geqslant 0$。

另一方面，从(2.32)式得到

$$\left(\frac{dH}{dr}+PH\right)\exp\left(\int_{\varepsilon}^{r}P(\tau)d\tau\right)\geqslant 0,$$

即

$$\frac{d}{dr}\left(H\exp\left(\int_{\varepsilon}^{r}P(\tau)d\tau\right)\right)\geqslant 0,$$

$$H(r)\exp\int_{\varepsilon}^{r}P(\tau)d\tau\geqslant H(\varepsilon)\geqslant 0.$$

这就完成了定理的证明。

应用定理 2.15，我们得到另一刘维尔型定理。

定理 2.16[138] 设M是m维 Cartan-Hadamard 流形。它的截面曲率 $-a^2\leqslant k\leqslant 0\ (a>0)$，Ricci 曲率以 $-b^2$ 为上界。设 f 是从M到任何 Riemann 流形的调和映照，能量慢发散。那末，当 $b\geqslant 2a$ 时，f 是常值映照。

证明 取 $D=B_R(x_0)\subset M$ 为以 x_0 为中心，R 为半径的测地球，它的边界为测地球面 $S_R(x_0)$。M中从 x_0 点出发的距离函数平方 r^2 是M上的光滑函数。取 $X=r\dfrac{\partial}{\partial r}$，其中 $\dfrac{\partial}{\partial r}$ 表示单位径向向量。显然 $S_R(x_0)$ 的单位法向量为 $\dfrac{\partial}{\partial r}$，并且

$$\begin{aligned}&\int_{\partial D}e(f)\langle X,\ n\rangle *1-\int_{\partial D}\langle f_*X,\ f_*n\rangle *1\\&=R\int_{S_R(x_0)}e(f)*1-\int_{S_R(x_0)}R\left\langle f_*\frac{\partial}{\partial r},\ f_*\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle *1\\&\leqslant R\int_{S_R(x_0)}e(f)*1.\end{aligned}\tag{2.33}$$

另一方面，

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}X=\frac{\partial}{\partial r},\ \nabla_{e_s}X=r\nabla_{e_s}\frac{\partial}{\partial r}=r\operatorname{Hess}(r)(e_s,\ e_t)e_t,$$

$$\operatorname{div}X=1+r\Delta r,$$

其中 $\{e_\alpha\}=\left\{e_s,\ \dfrac{\partial}{\partial r}\right\}$是 $B_R(x_0)$ 上的局部幺正标架场。所以，

$$\langle f_*e_\alpha, f_*e_\beta\rangle\langle\nabla_{e_\alpha}X, e_\beta\rangle$$
$$=\left\langle f_*\frac{\partial}{\partial r}, f_*\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle+r\mathrm{Hess}(r)(e_s, e_t)\langle f_*e_s, f_*e_t\rangle,$$

并且

$$\begin{aligned}\langle S_f, \nabla X\rangle &= e(f)\mathrm{div}X-\langle f_*e_\alpha, f_*e_\beta\rangle\langle\nabla_{e_\alpha}X, e_\beta\rangle\\ &= e(f)(1+r\Delta r)-\left|f_*\frac{\partial}{\partial r}\right|^2\\ &\quad -r\mathrm{Hess}(r)(e_s, e_t)\langle f_*e_s, f_*e_t\rangle.\end{aligned}$$

根据Hessian比较定理以及(2.26)式，

$$\begin{aligned}\langle S_f, \nabla X\rangle\geqslant&\left(\frac{1}{2}(br)\coth(br)-\frac{1}{2}\right)\left|f_*\frac{\partial}{\partial r}\right|^2\\ &+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(br)\coth(br)\right.\\ &\left.-(ar)\coth(ar)\right)\langle f_*e_s, f_*e_s\rangle.\end{aligned}$$

令 $h(x)=x\coth x$，那末 $h(0)=\lim\limits_{x\to 0}x\coth x=1$，并且

$$h'=\coth x-x\mathrm{csech}^2x=\frac{(\mathrm{sh}x)(\mathrm{ch}x)-x}{\mathrm{sh}^2x}\geqslant 0,$$

仅当 $x=0$ 时，$h'(x)=0$。再微分

$$h''(x)=2\mathrm{csech}^2x(x\coth x-1)\geqslant 0,$$

也仅当 $x=0$ 时，$h''=0$。$h(x)$和 $h'(x)$都是不减函数。设

$$g(r)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}h(br)-h(ar).$$

显然，$g(0)=0$，而

$$g'(r)=\frac{1}{2}bh'(br)-ah'(ar),$$

所以，当 $b\geqslant 2a$ 时，$g'(r)\geqslant 0$，且等号仅当 $r=0$ 时成立。因此

$$g(r)\geqslant 0,$$

等号也仅当 $r=0$ 时成立。

根据以上分析

$$\langle S_f, \nabla X\rangle\geqslant 0,$$

并且当 $e(f)$不恒等于零时，总存在M中一个邻域U，使 $e(f)$ 在

U中恒正。也由此可见，总存在M中一个邻域，使$\langle S_f, \nabla X\rangle$在其中恒正。因此，总存在$R_0>0$，使$R>R_0$时，

$$\int_{B_R(x_0)}\langle S_f, \nabla X\rangle \geqslant C, \tag{2.34}$$

这里C是一个正常数。将(2.33)式和(2.34)式代入(2.6)式，得到

$$R\int_{S_R(x_0)} e(f) * 1 \geqslant C. \tag{2.35}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{B_R(x_0)}\frac{e(f)(x)}{\psi(r(x))}*1 &\geqslant \int_s^{\infty}\frac{dR}{\psi(R)}\int_{S_R(x_0)} e(f)*1\\ &\geqslant \int_s^{\infty}\frac{CdR}{R\psi(R)}=\infty,\end{aligned}$$

其中s是某正常数，这是和映照f能量慢发散的假定相矛盾的。因此，必须有$e(f)\equiv 0$，f为常值映照。 ▮

考虑到典型域中曲率的具体数据，立即可得下面的定理。

定理 2.17[138] 设

$$M=\begin{cases}\mathscr{R}_{\mathrm{I}}(n, m), & \text{当 } n+m\geqslant 8 \text{ 时}\\ \mathscr{R}_{\mathrm{II}}(n), & \text{当 } n\geqslant 7 \text{ 时}\\ \mathscr{R}_{\mathrm{III}}(n), & \text{当 } n\geqslant 5 \text{ 时}\\ \mathscr{R}_{\mathrm{IV}}(n), & \text{当 } n\geqslant 8 \text{ 时},\end{cases}$$

那末，从M到任何 Riemann 流形N的能量慢发散的调和映照一定是常值映照。

注 1 利用(2.23)式，我们可以得到比定理 2.16 和定理2.17更强的结果，即可得到关于满足守恒律的取值于任何向量丛E的1 次微分形式的消没定理。至于对一般p-形式，$p\geqslant 2$时，上述证明不能奏效。

注 2 对复双曲空间CH^m，它的截曲率$-4\leqslant k\leqslant -1$，它的 Ricci 曲率为$-2(m+1)$，根据定理 2.16，$m\geqslant 7$时，相应结论成立。由此可见对强负曲率流形，有时用定理 2.8 得到的结论更强。当流形截曲率上界为零时，定理 2.16 才显示出优越性。定理

2.16包含双曲空间，但不包含欧氏空间的情形。

注3　对维数较低的典型域，要对其中的距离函数作更具体的计算才可能得到相应的结论。

第 3 章

调和映照和高斯映照

古典高斯映照在三维欧氏空间的极小曲面理论中起着很重要的作用。对欧氏空间中的一般子流形，我们可定义广义高斯映照，子流形的性质往往从它的广义高斯映照的性质反映出来，并且和调和映照密切相关。本章将展开这方面的研究结果。

§3.1 广义高斯映照

设 $M\to R^{m+p}$ 是欧氏空间中的m维定向子流形。对任何一点 $x\in M$，有切空间 T_xM，由外围空间 R^{m+p} 中的平行移动，将 T_xM 平移到 R^{m+p} 的原点，得到 R^{m+p} 中的一个m维定向线性子空间，从而得到 Grassmann 流形的一点 $\gamma(x)\in G_{m,p}$。这就定义了广义高斯映照 γ: $M\to G_{m,p}$。关于子流形的性质和 γ 调和性的关系由 Ruh 和 Vilms 所发现[94]。我们用活动标架法，即陈文献[22]中的方法证明如下。

设 M，N 是m和n维 Riemann 流形，它们分别有局部幺正标架场$\{e_1, \cdots, e_m\}$，$\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$，对偶标架场 $\{\omega_1, \cdots, \omega_m\}$ 和 $\{\omega_1^*, \cdots, \omega_n^*\}$，以及 Riemann 度量

$$dS_M^2=\sum_i(\omega_i)^2,\quad dS_N^2=\sum_A(\omega_A^*)^2,$$

$$i,\ j=1,\ \cdots,\ m,\ A,\ B=1,\ \cdots,\ n$$

流形M的结构方程是

$$d\omega_i=\omega_{ij}\wedge\omega_j,\quad \omega_{ij}+\omega_{ji}=0,$$

$$d\omega_{ij}=\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}+\Omega_{ij},$$

其中 ω_{ij} 和 Ω_{ij} 分别是联络形式和曲率形式。

对光滑映照 $f: M\to N$,

$$f^*\omega_A^* = a_{Ai}\omega_i. \tag{3.1}$$

定义 a_{Ai} 的共变微分为

$$Da_{Ai} = da_{Ai} + a_{Aj}\omega_{ji} + a_{Bi}f^*\omega_{BA}^*,$$

并且

$$Da_{Ai} = a_{Aij}\omega_j.$$

显然

$$a_{Aij} = a_{Aji}.$$

f 是调和映照的条件现在为 $\sum_j a_{Ajj}\equiv 0$, f 的能量密度为

$$\frac{1}{2}\sum_{A,i} a_{Ai}^2.$$

设 f: $M\to R^{m+p}$ 是等距浸入。沿M取 R^{m+p} 的幺正标架场 e_1, $\cdots$, e_{m+p}, 使 $e_i(i=1, \cdots, m)$ 是M的切向量。设 ω_1, $\cdots$, ω_{m+p} 是对偶余标架场。R^{m+p} 的结构方程限制在M上有

$$\omega_\alpha = 0,$$

$$d\omega_i = \omega_{ij}\wedge\omega_j,\ \omega_{ij}+\omega_{ji}=0,$$

$$\omega_{\alpha i} = h_{\alpha ij}\omega_j,$$

$$d\omega_{ij} = \omega_{ik}\wedge\omega_{kj} + \omega_{i\alpha}\wedge\omega_{\alpha j},$$

$$(i,\ j=1,\ \cdots,\ m,\ \alpha,\ \beta=m+1,\ \cdots,\ m+p)$$

等距浸入f 的平均曲率向量定义为

$$H = \frac{1}{m}\sum_{i,\alpha} h_{\alpha ii}e_\alpha.$$

如果 $H\equiv 0$, 则f 称为极小浸入。我们定义 $h_{\alpha ij}$ 的共变微分为

$$Dh_{\alpha ij} = dh_{\alpha ij} + h_{\alpha tj}\omega_{ti} + h_{\alpha it}\omega_{tj} + h_{\beta ij}\omega_{\beta\alpha} \overset{\text{def}}{=} h_{\alpha ijk}\omega_k.$$

容易证明 $h_{\alpha ijk} = h_{\alpha ikj}$, 因而 $h_{\alpha ijk}$ 关于 i, j, k 是全对称的。如果

$$DH = \frac{1}{m}\sum h_{\alpha iik}\omega_k e_\alpha \equiv 0, \tag{3.2}$$

那么M称为平行平均曲率子流形。

我们再用活动标架法来描述 R^{m+p} 中子流形 M 的高斯映照 γ。设 O 是 R^{m+p} 中的原点，把 $SO(m+p)$ 与所有的幺正标架 $(O; e_1, \cdots, e_{m+p})$ 构成的流形相等同，把 $SO(m+p)/SO(m)\times SO(p)$ 和过 O 点的定向 m 维线性子空间组成的 Grassmann 流形相等同。设 $P=\{(x; e_1, \cdots, e_m); x\in M, e_i\in T_xM\}$ 是 M 上幺正标架主丛，$Q=\{(x; e_{m+1}, \cdots, e_{m+p}); x\in M, e_\alpha\in N_xM\}$ 是 M 上的法标架主丛，则 $\bar{\pi}: P\oplus Q\to M$ 是 M 上的纤维为 $SO(m)\times SO(p)$ 的主丛的投影映照，而 $i: P\oplus Q\to SO(m+p)$ 是在上述意义下自然的包含映照，即 $i(x; e_1, \cdots, e_{m+p})=(O; e_1, \cdots, e_{m+p})$。

我们定义 $M\to G_{m,p}$ 的一个映照 γ，它把 $x\in M$ 映成 $T_xM\in G_{m,p}$。映照 $\gamma: M\to G_{m,p}$ 就称为浸入 f 的高斯映照。这样，下面的图是可交换的。

$$
\begin{array}{ccc}
P\oplus Q & \xrightarrow{i} & SO(m+p) \\
{\scriptstyle\bar{\pi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\
M & \xrightarrow{\gamma} & G_{m,p}
\end{array}
$$

对 $\{e_1, \cdots, e_{m+p}\}\in SO(m+p)$ 设

$$
de_A=\theta_{AB}e_B, \quad \theta_{AB}+\theta_{BA}=0,
$$

$$
\left(\begin{array}{c} A, B, \cdots=1, \cdots, m+p; i=1, \cdots, m; \\ \alpha=m+1, \cdots, m+p. \end{array}\right)
$$

则 θ_{AB} 满足 Maurer-Cartan 方程

$$
d\theta_{AB}=\theta_{AC}\wedge\theta_{CB}.
$$

于是，2 次微分形式

$$
dS_G^2=\sum_{i,\alpha}\theta_{\alpha i}^2. \tag{3.3}
$$

定义了 $G_{m,p}$ 的典范 Riemann 度量。它在 $SO(m+p)$ 的作用下是不变的。

相应于(3.3)式的度量，立即得到相容的联络形式 $\theta_{\alpha i\beta j}$，即

$$
d\theta_{\alpha i}=\theta_{\alpha j}\wedge\theta_{ji}+\theta_{\alpha\beta}\wedge\theta_{\beta i}=\sum(\delta_{\alpha\beta}\theta_{ij}+\delta_{ij}\theta_{\alpha\beta})\wedge\theta_{\beta j},
$$

$$
\theta_{\alpha i\beta j}=\delta_{\alpha\beta}\theta_{ij}+\delta_{ij}\theta_{\alpha\beta}. \tag{3.4}
$$

设

$$\omega_{AB}=i^*\theta_{AB},$$

且为简单起见，我们不区分主丛及底流形上的微分形式，则有

$$\omega_{AB}=\gamma^*\theta_{AB}.$$

从而得到

$$\gamma^*\theta_{ai}=\omega_{ai}=h_{aij}\omega_j. \tag{3.5}$$

据此即得高斯映照 $\gamma: M\to G_{m,p}$ 的能量密度

$$e(\gamma)=\frac{1}{2}\sum_{a,i,j}h_{aij}^2, \tag{3.6}$$

按前面给出的调和性条件就是 $\sum_j h_{aijj}=0$，比较(3.2)式，我们立即得到M在 R^{n+p} 中的平均曲率向量是平行的。这就完成了下列定理的证明。

定理 3.1[94]　M是 R^{m+p} 中的平行平均曲率子流形的充要条件是它的高斯映照是调和映照。

§3.2　类锥调和映照

对球面中的m维子流形 $M\to S^{m+p}\to R^{m+p+1}$ 往往定义如下的高斯映照。对任何 $x\in M$，有关于 S^{m+p} 的法空间 N_xM，将它平行移动到 R^{m+p+1} 中的坐标原点，而得到 Grassmann 流形中的一点 $G_{p,m+1}$。这样定义了法高斯映照 $\gamma: M\to G_{p,m+1}$。在Grassmann 流形 $G_{p,m+1}$ 和 $G_{m+1,p}$ 之间有一个自然的等距 η，它将 R^{m+p+1} 中任一 p 维平面对应于与其互补的 $m+1$ 维平面。那末，$\gamma^*=\eta\circ\gamma$ 将 M中任一点 x 对应于 T_xM 及 x 点的位置向量组成的$(m+1)$维子空间。

另一方面为研究球面中的子流形 $M\to S^{m+p}$，也可研究M所生成锥 CM 的性质。CM 是 $M\times[0,\infty)$到 R^{m+p+1} 的映照：$(x,t)\to tx$ 的象，其中 $x\in M$，$t\in[0,\infty)$。CM有一个奇点 $t=0$。为去掉奇点，我们考虑截断锥 CM_ε，它是由同样的映照限制于 $M\times[\varepsilon,\infty)$所定义的象，其中 ε 是任一正数。

Simons 说明了如果M是 S^{m+p} 中的m维极小子流形，那末，

CM_s 是 R^{m+p+1} 中的 $(m+1)$ 维极小锥。事实上，我们可以证明如下的结果。

命题 **3.2** CM_s 是 R^{m+p+1} 中具有平行平均曲率子流形的充要条件是 M 为 S^{m+p} 中的极小子流形。

证明 对任何给定点 $x \in M$，选取 x 点邻近的局部幺正标架场 $\{e_i\}$，且 $\nabla_{e_j} e_i|_x = 0$。设 $\{e_\alpha\}$ 是 x 点附近 M 的幺正法向量组成的标架场。那末，利用沿 O 点出发的射线上下平行移动得到 R^{n+p+1} 中的局部向量场 E_i 和 E_α。显然 $E_i = \frac{1}{r} e_i$, $E_\alpha = \frac{1}{r} e_\alpha$，其中 r 为从 O 点到相应点的距离。沿这些射线的单位切向量为 τ，$\tau = \frac{\partial}{\partial r}$，显然 $\nabla_\tau \tau = 0$。这样 $\{E_i, E_\alpha, \tau\}$ 构成了 R^{m+p+1} 中的局部幺正标架场，而 $\{E_i, \tau\}$ 构成了 CM_s 中的标架场。

设 CM_s 在 R^{m+p+1} 中的平均曲率向量为 $\bar{H}$，它是法丛 NCM_s 的一个截面，有如下局部表达式

$$\bar{H} = \frac{1}{m+1} (\nabla_{E_i} E_i + \nabla_\tau \tau)^N, \tag{3.7}$$

其中 $(\quad)^N$ 表示向量在 CM_s 的法丛的投影。

现在，沿着过 x 点的射线计算表达式 $\nabla_{E_i} E_i$。

首先，注意到

$$\nabla_{E_i} \tau = \nabla_{E_i} \frac{X}{r} = \frac{1}{r} E_i,$$

其中 X 表示所在点的位置向量。那末

$$\langle \nabla_{E_i} E_j, \tau \rangle = -\langle E_j, \nabla_{E_i} \tau \rangle = -\frac{1}{r} \delta_{ij}.$$

而

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle &= \langle \nabla_\tau \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle \\ &= \langle \nabla_{E_i} \nabla_\tau E_j, E_k \rangle + \langle \nabla_{[\tau, E_i]} E_j, E_k \rangle \\ &= -\frac{1}{r} \langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle. \end{aligned} \tag{3.8}$$

类似地，还有

$$\frac{d}{dt}\langle\nabla_{E_i}E_j,\ E_\alpha\rangle=-\frac{1}{r}\langle\nabla_{E_i}E_j,\ E_\alpha\rangle. \tag{3.9}$$

积分(3.8)式和(3.9)式，有

$$\langle\nabla_{E_i}E_j,\ E_k\rangle=\frac{A_{ijk}}{r}, \tag{3.10}$$

$$\langle\nabla_{E_i}E_j,\ E_\alpha\rangle=\frac{B_{ij\alpha}}{r}, \tag{3.11}$$

其中 A_{ijk} 和 $B_{ij\alpha}$ 是待定常数。利用 $r=1$ 时的条件可以确定这些常数：

$$A_{ijk}=0,\ B_{ij\alpha}=h_{ij\alpha}. \tag{3.12}$$

其中 $h_{ij\alpha}$ 是M在 S^{m+p} 中的第二基本形式的系数。从而，

$$\nabla_{E_i}E_j=-\frac{1}{r}\delta_{ij}\tau+\frac{1}{r}h_{ij\alpha}E_\alpha,$$

代入(3.7)式

$$\bar{H}=\frac{1}{(m+1)r}\sum_{i,\alpha}h_{ii\alpha}E_\alpha. \tag{3.13}$$

如果M是 S^{m+p} 中的极小子流形，则 $\sum_i h_{ii\alpha}=0$，从(3.13)式即有 $\bar{H}=0$；反之，如果 $\bar{H}$ 在CM_ε 的法丛中平行。从(3.13)式得

$$(\nabla_\tau\bar{H})^N=-\frac{1}{(m+1)r^2}\sum_{i,\alpha}h_{ii\alpha}E_\alpha.$$

这意味着$\sum_i h_{ii\alpha}=0$，M是 S^{m+p} 中的极小子流形。∎

下面，我们来定义类锥映照。

Schoen 和 Ulenbeck 证明广义极小映照的正则性定理时，引入了切映照的概念(见本书第5章)。类锥映照就是切映照概念的自然推广。对 $S^{m+p}\to R^{m+p+1}$，我们引进从 $R^{m+p+1}\backslash\{0\}$ 到 S^{m+p} 的映照

$$\psi(x)=\frac{x}{|x|},$$

其中 x 是 $R^{m+p+1}\backslash\{0\}$ 中的任一向量。这样，对从 $M(\to S^{m+p})$ 到另一 Riemann 流形N的映照 f_1，我们可以定义CM_ε到N 的映到 $f=f_1\circ\psi$，我们称f为类锥映照。它在截断锥 CM_ε 的母线上有相同的象。反之，从任一类锥映照f可诱导出M到 N 的映照

$f_1=f\circ i$，其中 $i: M\to CM_\varepsilon$ 是标准包含映照。不难验证下面的命题。

命题 3.3 f_1 是全测地映照的充要条件为 f 是全测地映照；f_1 是调和映照的充要条件为 f 是调和映照。

证明从直接计算立即得到，这里从略。

我们来考虑类锥映照的一个重要例子。

设 $M\to S^{m+p}\to R^{m+p+1}$ 是球面中的子流形。它决定的截断锥为 CM_ε。对任何 $x\in M$，选取 x 点附近，如证明命题 3.2 时的局部幺正标架场 $\{E_i, E_\alpha, \tau\}$。对 R^{m+p+1} 中的子流形 CM_ε，按通常方式可定义高斯映照，它由 CM_ε 的切空间所决定，而 CM_ε 的切空间由 $\{E_i, \tau\}$ 所张成。由于 $E_i=\dfrac{1}{r}e_i$，这说明，CM_ε 沿着母线有相同的切空间，即高斯映照 $\gamma_{CM_\varepsilon}: CM_\varepsilon\to G_{m+1,p}$ 是类锥映照。

另一方面，对 S^{m+p} 中的子流形 M，我们在一开始已定义了高斯映照 $\gamma: M\to G_{p,m+1}$，以及 $\gamma^*=\eta\circ\gamma: M\to G_{m+1,p}$，其中

$$\eta: G_{p,m+1}\to G_{m+1,p}$$

是等距映照。显然可见，

$$\gamma_{CM_\varepsilon}=\gamma^*\circ\psi. \tag{3.14}$$

这样，从命题 3.3 及调和映照的复合性质立即有下列关系：

$$\gamma_{CM_\varepsilon}\text{调和}\Longleftrightarrow\gamma^*\text{调和}\Longleftrightarrow\gamma\text{调和},$$

而从定理 3.1 及命题 3.2 又有

$M\to S^{m+p}$ 极小浸入 $\Longleftrightarrow CM_\varepsilon\to R^{m+p+1}$ 为具平行平均曲率浸入 $\Longleftrightarrow\gamma_{CM_\varepsilon}$ 调和。

因此，以不同于文献[16]和[64]的方法证明了下面的定理。

定理 3.4 $M\to S^{m+p}$ 是极小浸入的充要条件为它的法高斯映照 $\gamma: M\to G_{p,m+1}$ 为调和映照。

球面中的极小子流形与其高斯映照还有什么关系呢？我们考虑紧致超曲面的情形：$M\to S^{m+1}\to R^{m+2}$。首先，M 不可能是稳定极小超曲面，它的高斯映照也不可能是稳定的。但 M 上的锥 CM_ε 作为 R^{m+2} 的超曲面有可能是稳定的，Schoen 得到了这类超曲面

的拓扑障碍[98]. 类似地，我们可考虑 γ_{CM_ε} 是稳定类锥调和映照，得到了同样的拓扑障碍。

定理 3.5[132]　设 $M\to S^{m+1}$ 是紧致极小超曲面，如果法高斯映照 γ 所对应的类锥映照 $\gamma_C: CM_\varepsilon\to S^{m+1}$ 是稳定的，那末 M 具有正数量曲率的度量。

证明　沿 $\gamma_C(CM_\varepsilon)$ 取 S^{m+1} 上的共形向量场乘上 CM_ε 上具紧致支集的函数 u 作为变分向量场，计算 γ_C 的第二变分。而 S^{m+1} 上的共形向量场构成 $m+2$ 维向量空间 R^{m+2}。这样，我们得到 R^{m+2} 上的二次形，取迹得到稳定性不等式[130]（也请见后面的§5.4)

$$\int_{CM_\varepsilon}\left(|\nabla u|^2-\frac{m-1}{m+1}u^2|d\gamma_C|^2\right)*1\geqslant 0,$$

它可写成

$$\int_{M\times(0,\infty)}\left(|\nabla u|^2-\frac{m-1}{m+1}|dr|^2u-r^2\frac{\partial^2u}{\partial r^2}\right.$$
$$\left.-mr\frac{\partial u}{\partial r}\right)r^{m-2}u*1\geqslant 0,\qquad(3.15)$$

这里 ∇ 表示 M 上的梯度算子。考虑 M 上的强椭圆算子

$$L_1=\Delta+\frac{m-1}{m+1}|dr|^2$$

和 $(0,\infty)$ 上的常微分算子

$$L_2=r^2\frac{d^2}{dr^2}+mr\frac{d}{dr}.$$

设 L_1 的第一特征值为 λ_1，L_2 的第一特征值为 δ_1。那末稳定性条件(3.15)化为[108]

$$\lambda_1+\delta_1\geqslant 0,\qquad(3.16)$$

而直接计算得到 $\delta_1=\frac{(m-1)^2}{4}$。这样

$$0\leqslant\lambda_1+\delta_1=\frac{\inf\int_M\left(-\Delta u-\frac{m-1}{m+1}|dr|^2u\right)u*1}{\int_M u^2*1}+\frac{(m-1)^2}{4},$$

即

$$\int_M\left(|\nabla u|^2-\left(\frac{m-1}{m+1}|dr|^2-\frac{(m-1)^2}{4}\right)u^2\right)*1\geqslant 0. \tag{3.17}$$

设M在S^{m+1}中的第二基本形式长度平方为$|B|^2$，我们有

$$|B|^2=|dr|^2. \tag{3.18}$$

类似于(3.6)式的推导，对球面中子流形也一样可得上式．而从超曲面的高斯方程得

$$|B|^2=m(m-1)-R, \tag{3.19}$$

其中R是M的数量曲率。将(3.18)式和(3.19)式代入(3.17)式得到

$$\int_M\left(|\nabla u|^2+\left(\frac{m-1}{m+1}R-\frac{(m-1)^2(3m-1)}{4(m+1)}\right)u^2\right)*1\geqslant 0, \tag{3.20}$$

那末，对$0<\alpha\leqslant 1$有

$$\begin{aligned}&\int_M\left(|\nabla u|^2+\alpha\frac{m-1}{m+1}Ru^2\right)*1\\ \geqslant\ &\alpha\int_M\left(|\nabla u|^2+\frac{m-1}{m+1}Ru^2\right)*1\geqslant 0,\end{aligned} \tag{3.21}$$

在(3.21)式中取$\alpha=\dfrac{(m+1)(m-2)}{4(m-1)^2}$，得

$$\int_M\left(|\nabla u|^2+\frac{m-2}{4(m-1)}Ru^2\right)*1\geqslant 0,$$

这说明$L=\Delta-\dfrac{m-2}{4(m-1)}R$的第一特征值为正．根据文献[72]中的一个定理知$M$共形等价于正数量曲率的流形。

注 根据Gromov-Lawson以及Schoen-Yau的工作，知道具有正数量曲率度量的流形有拓扑障碍．这就造成我们所考虑的这类极小超曲面的拓扑障碍；如M不可能同胚于m维环面。

§3.3 广义极值原理

众所周知，若f是定义在紧致流形M上的连续函数，那末必存在x_1, $x_2 \in M$, 使$f(x_1) = \max\limits_{x\in M} f(x)$, $f(x_2) = \min\limits_{x\in M} f(x)$。这个基本性质在几何定理的证明中是很有用的。将极值原理推广到完备Riemann流形的是Omori[84]。后来，丘成桐用更简单的方法改进了Omori的结果[142]。从此以后就称为Omori-Yau广义极值原理。

设M是完备的Riemann流形，它的Ricci曲率有下界。设u是在M上有上界的C^2函数。那末，对任何$\varepsilon>0$，存在点列$\{x_k\}\in M$，使

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k) = \sup u,$$

且当k充分大时

$$|\nabla u|(x_k) < \varepsilon,$$
$$\Delta u(x_k) < \varepsilon.$$

为了用调和映照来研究平行平均曲率子流形，我们希望改进上述广义极值原理。一般地说，曲率条件是不能去掉的。如在R^2中定义Riemann度量$ds^2 = dr^2 + G^2(r)d\theta^2$。对其上的径向函数$u(r)$，

$$\Delta u = u'' + \frac{u'G'}{G} = \frac{1}{G}(Gu')'.$$

定义

$$u(r) = \int_0^r \frac{ds}{G(s)} \int_0^s G(t)dt,$$

它满足$\Delta u \equiv 1$，并且

$$\sup u(r) = \int_0^\infty \frac{ds}{G(s)} \int_0^s G(t)\,dt.$$

如果取$G(r) = r^{1+\varepsilon}e^{r^{1+\varepsilon}}$（当$r\geqslant 1$时），上述积分收敛，即$u(r)$有上界，但对函数$u$不满足极值原理。而曲面的高斯曲率在无穷远的

性态相当于 $-r^{2+2\epsilon}$. 这说明流形的曲率趋向于 $-\infty$ 速度太快时就不满足极值原理. 然而,我们可以证明下列结果.

定理 3.6[17] 设 M 是完备 Riemann 流形,它的 Ricci 曲率满足 $\mathrm{Ric}\geqslant -C(1+r^2\log^2(r+2))$, 其中 r 是从 M 中固定点 x_0 出发的距离函数,C 是正常数. 设 u 是 M 中有上界的 C^2 函数. 那末对任何 $\varepsilon>0$, 存在点列 $\{x_k\}\subset M$, 使

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k)=\sup u,$$

且当 k 充分大时

$$|\nabla u|(x_k)<\varepsilon,$$
$$\Delta u(x_k)<\varepsilon.$$

首先证明下列引理.

引理 3.7 设 M 是 m 维完备 Riemann 流形, 它的 Ricci 曲率满足 $\mathrm{Ric}|_x\geqslant -CF(r)$, 其中 $C>0$ 是常数, r 是从固定点 x_0 到 x 点的距离,$F: R\to R$ 是非减可微函数, $F\geqslant 1$. 如果 x 不落在 x_0 的割迹上,那末

$$\Delta r(x)\leqslant\frac{m-1}{r}+\sqrt{(m-1)CF(r(x))}. \tag{3.22}$$

证明 设 $\gamma: [0,\gamma]\to M$ 是连结 x_0 到 x 的极小测地线, $\gamma(0)=x_0$, $\gamma(r)=x$, 取 x 点的幺正基 $\{e_i\}$ $(i=1,\cdots,m)$, 使 $e_1=\dot\gamma(x)$. 将它们沿测地线 γ 平行移动, 得到沿测地线 γ 的幺正标架场 $\{e_i(t)\}$. γ 上没有共轭点,所以存在唯一的 Jacobi 场 J_α, 使

$$J_\alpha(0)=0 \quad 和 \quad J_\alpha(r)=e_\alpha \quad (\alpha=2,\cdots,m).$$

这样,我们有

$$\begin{aligned}\Delta r(x)&=e_ie_i(r)-(\nabla_{e_i}e_i)(r)\\&=-\sum_{\alpha=2}^m(\nabla_{e_\alpha}e_\alpha)(r)=\sum_{\alpha=2}^m\langle J_\alpha,\nabla_{J_\alpha}\dot\gamma\rangle\Big|_0^r\\&=\sum_{\alpha=2}^m\int_0^r\frac{d}{dt}\langle\nabla_{J_\alpha}\dot\gamma,J_\alpha\rangle dt\\&=\sum_{\alpha=2}^m\int_0^r(|\dot J_\alpha|^2-\langle R(\dot\gamma,J_\alpha)\dot\gamma,J_\alpha\rangle)dt.\end{aligned} \tag{3.23}$$

设 $f(t)$ 是 $[0,r]$ 上的分段光滑函数, $f(0)=0$, $f(r)=1$. 那末,

$\{f(t)e_\alpha(t)\}$ 是沿测地线 γ 的分段光滑向量场 $f(0)e_\alpha(0)=0$, $f(r)e_\alpha(r)=J_\alpha$。根据著名的指标不等式

$$\Delta r(x)\leqslant\int_0^r((m-1)(f')^2+CF(t)f^2)dt. \tag{3.24}$$

它右端的欧拉-拉格朗日方程是

$$f''-C_1Ff=0, \tag{3.25}$$

其中 $C_1=C/(m-1)$。对边值问题

$$\begin{cases}f''-C_1Ff=0\\ f(0)=0,\ f(r)=1\end{cases} \tag{3.26}$$

解的存在性可用很多方法说明。下面用常微分方程比较的方法来证明。考虑下列初值问题

$$\begin{cases}f_1''-C_1Ff_1=0\\ f_1(0)=0,\ f_1'(0)=1.\end{cases} \tag{3.27}$$

显然(3.27)式有唯一解，记为 f_1。容易说明 $f_1(t)\geqslant0$，设 h_1 是

$$\begin{cases}h_1''-C_1h_1(t)=0\\ h_1(0)=0,\ h_1'(0)=1\end{cases}$$

的解。考虑到

$$\begin{aligned}0&=\int_0^t\{f_1(h_1''-C_1h_1)-h_1(f_1''-C_1Ff_1)\}d\tau\\ &=\int_0^t(f_1h_1''-h_1f_1'')d\tau+\int_0^tC_1(F(\tau)-1)h_1f_1d\tau\\ &\geqslant(f_1h_1'-h_1f_1')\Big|_0^t\\ &=f_1(t)h_1'(t)-h_1(t)f_1'(t),\end{aligned}$$

从而可得

$$\left(\frac{f_1}{h_1}\right)'\geqslant0.$$

对任何 $t_0\in(0,t)$,

$$\frac{f_1(t)}{h_1(t)}\geqslant\frac{f_1(t_0)}{h_1(t_0)},$$

所以

$$\frac{f_1(t)}{h_1(t)} \geqslant \lim_{t_0\to 0}\frac{f_1(t_0)}{h_1(t_0)} = \lim_{t_0\to 0}\frac{f_1'(t_0)}{h_1'(t_0)} = 1,$$

即

$$f_1(t) \geqslant h_1(t) = \frac{1}{\sqrt{C_1}}\operatorname{sh}(\sqrt{C_1}t). \tag{3.28}$$

这说明 $f_1(r) \neq 0$, $f(t) = f_1(t)/f_1(r)$ 是边值问题(3.26)的解。从而

$$\int_0^r [(m-1)(f')^2 + CFf^2]dt$$

$$= (m-1)\int_0^r [(f')^2 + ff'']dt = (m-1)f'(r).$$

代入(3.24)式，得到

$$\Delta r(x) \leqslant (m-1)f'(r), \tag{3.29}$$

现在我们来估计 $f'(r)$。首先，从(3.28)式知

$$f'(0) \leqslant \frac{\sqrt{C_1}}{\operatorname{sh}(\sqrt{C_1}r)}. \tag{3.30}$$

另一方面，设 $h_2(t)$ 是

$$\begin{cases} h_2''(t) - C_1F(r)h_2(t) = 0 \\ h_2(0) = 0;\ h_2'(0) = 1, \end{cases}$$

运用和前面类似的论证方法，我们有

$$f_1(t) \leqslant h_2(t) = \frac{1}{\sqrt{C_1F(r)}}\operatorname{sh}(\sqrt{C_1F(r)}\,t),$$

据此可得

$$f'(0) \geqslant \frac{\sqrt{C_1F(r)}}{\operatorname{sh}(\sqrt{C_1F(r)}\,r)}. \tag{3.31}$$

从(3.30)式和(3.31)式，我们有

$$(f'(0))^2 \leqslant \frac{1}{r^2}. \tag{3.32}$$

而

$$(f'(t))^2 - (f'(0))^2 = \int_0^t \frac{d}{d\tau}(f'(\tau))^2 d\tau$$

$$= \int_0^t C_1F(f^2)'d\tau \leqslant C_1F(t)f^2(t). \tag{3.33}$$

从(3.29)式(3.32)式和(3.33)式就得到(3.22)式。

注　当 $F\equiv 1$ 时，容易看出 $f=\mathrm{sh}(\sqrt{C_1}t)/\mathrm{sh}(\sqrt{C_1}r)$。从(3.29)式可得

$$\Delta r(x)\leqslant(m-1)\sqrt{C_1}\coth(\sqrt{C_1}r),$$

这就得到通常 Laplace 比较定理的结果。

我们回到定理 3.6 的证明，它和丘成桐的证明一样。

定理 3.6 的证明　对任何 $k>0$，在 M 上定义函数

$$g(x)=\frac{u(x)-u(x_0)+1}{[\log(r^2+2)]^{1/k}}. \tag{3.34}$$

容易看出，g 在某点 $x_k\in M$，达到最大值。利用熟知的支撑函数技巧，我们不妨设，x_k 不在 x_0 的割迹上，g 也就在 x_k 附近是光滑的。我们有

$$\nabla g(x_k)=0,$$

展开得

$$\frac{1}{[\log r^2(x_k)+2]^{\frac{1}{k}}}\left\{\nabla u(x_k)-\frac{2(u(x_k)-u(x_0)+1)}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)}r(x_k)\nabla r(x_k)\right\}=0, \tag{3.35}$$

即，当 $k\to\infty$ 时，

$$|\nabla u|(x_k)=\frac{2(u(x_k)-u(x_0)+1)r(x_k)}{k(r^2(x_k)+2)\log(r^2(x_k)+2)}\to 0.$$

这就证明了定理的第2式。我们来证明它的第1式。如果它不成立，那末，能找到 $\delta>0$，$\{x_k\}$ 的子列（仍记为 $\{x_k\}$）及 $x\in M$，使

$$u(x)>u(x_k)+\delta. \tag{3.36}$$

如果当 $k\to\infty$ 时，$r(x_k)\to\infty$，从(3.36)式可得，当 $r(x_k)>r(x)$ 时，

$$g(x)=\frac{u(x)-u(x_0)+1}{[\log(r^2(x)+2)]^{1/k}}>\frac{u(x_k)-u(x_0)+1}{[\log(r^2(x_k)+2]^{1/k}},$$

这与 x_k 的定义相矛盾。

如果对 k 的某子序列，$\{x_k\}$ 收敛于 $\bar{x}$，那末，从(3.36)式知

$$u(x)\geqslant u(\bar{x})+\delta,$$

因此，当 k 充分大时，

$$\frac{u(x)-u(x_0)+1}{[\log(r^2(x)+2)]^{1/k}}>\frac{u(x_k)-u(x_0)+1}{[\log(r^2(x_k)+2)]^{1/k}},$$

也得到矛盾。因此，证明了定理的第1式。

在 x_k 点，还有 $\Delta g(x_k)\leqslant 0$。由直接计算，得到

$$\begin{aligned}\Delta u &- \frac{4r\langle\nabla u,\nabla r\rangle}{k(r^2+2)\log(r^2+2)}\\&-\frac{2(u(x_k)-u(x_0)+1)(r\Delta r+|\nabla r|^2)}{k(r^2+2)\log(r^2+2)}\\&+\frac{4(u(x_k)-u(x_0)+1)r^2|\nabla r|^2}{k(r^2+2)^2\log(r^2+2)}\\&+\frac{4\left(1+\frac{1}{k}\right)(u(x_k)-u(x_0)+1)r^2|\nabla r|^2}{k(r^2+2)^2[\log(r^2+2)]^2}\leqslant 0.\end{aligned}$$

利用(3.35)式，将上式化简，从而得到

$$\Delta u(x_k)\leqslant\frac{2(u(x_k)-u(x_0)+1)}{k(r^2+2)\log(r^2+2)}(r\Delta r+1). \qquad (3.37)$$

从(3.22)式和(3.37)式，得到

$$\begin{aligned}\Delta u(x_k)\leqslant&\frac{2(u(x_k)-u(x_0)+1}{k(r^2+2)\log(r^2+2)}\\&\cdot(r\sqrt{(m-1)C(1+r^2\log^2(r+2))}+m).\end{aligned}$$

这就证明了定理的第3式。 ∎

注 从本节一开始给出的例子可见，定理3.6差不多已经到最佳。黄宣国对此还有进一步讨论[63]。

§3.4 象半径估计及其在子流形理论中的应用

早在1965年，陈省身证明了下列定理[21]：

欧氏空间 R^n 中的常平均曲率图 $z=F(x_1,\cdots,x_{n-1})$，如果对 $x_1,\cdots,x_{n-1}$ 的所有值有定义，一定是极小超曲面，因而当 $n\leqslant 8$ 时一定是超平面。

这是古典 Bernstein 定理的一个推广。在文章中，陈省身

问：高斯象的处处稠密性是否也对完备非零常平均曲率的曲面成立？对此问题，在1982年，Hoffeman，Osserman 和 Schoen 以下列漂亮的定理，给予回答。

定理 3.8[55] 对 R^3 中的一个完备常平均曲率曲面，如果它的高斯象落在某开半球面中，那末，它是平面；如果它的高斯象落在某个闭半球面中，那末，它是平面或正圆柱面。

定理 3.9[55] 设M是 R^4 中完备的具有非零平行平均曲率的曲面。它的高斯映照的象空间 $G_{2,2}$ 可看成 $S^2\times S^2$，γ_1 表示高斯映照和到第一因子投影映照的复合，类似地有 γ_2。那末，γ_1 和 γ_2 都不能落在某一开半球内。如果 γ_1 和 γ_2 中有一个落在某一闭半球内，那末，M一定是正圆柱面或二个圆周的乘积。

从上面的定理，自然的问题是：对欧氏空间 R^{m+p} 中的完备具平行平均曲率的子流形 M，它的高斯象落在 Grassmann 流形 $G_{m,p}$ 的测地凸邻域中，什么条件将迫使M成为极小子流形，甚至成为线性子空间。

另一方面，Calabi 和陈省身曾提出 R^3 中有界极小曲面的存在性问题。

这二个问题，可以统一化为象半径的估计。应用广义极值原理，我们得到的结果如下。

定理 3.10[128]、[16] 设M是完备的m维 Riemann 流形，它的 Ricci 曲率以 $-C(1+r^2\log^2(r+2))$ 为下界，其中 r 是从固定点 $x_0\in M$出发的距离函数。设N是截面曲率以K为上界的Riemann 流形，$B_R(y_0)$是N中以 y_0 为中心R为半径的测地凸球（当 $K>0$ 时，$R<\dfrac{\pi}{2\sqrt{K}}$）。如果 $f: M\to N$ 是具有有界张力场 $|\tau|\leqslant m\tau_0$（τ_0 是常数）的光滑映照，且 $f(M)\subset B_R(y_0)$，那末

(1) 当 $K>0$ 时，

$$R\geqslant\frac{1}{\sqrt{K}}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\sqrt{K}\inf e(f)}{m\tau_0}\right);\tag{3.38}$$

(2) 当 $K=0$ 时，

$$R \geqslant \frac{2\inf e(f)}{m\tau_0}, \tag{3.39}$$

(3) 当 $K<0$ 时，

$$R \geqslant \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{th}^{-1}\left(\frac{2\sqrt{-K}\inf e(f)}{m\tau_0}\right). \tag{3.40}$$

证明 当 $K>0$ 时，我们考虑 $B_R(y_0)$ 中的有界光滑函数

$$h = 1-\cos\sqrt{K}\rho,$$

其中 ρ 是 N 中从 y_0 出发的距离函数．根据 Hessian 比较定理，

$$\operatorname{Hess} h \geqslant K(\cos\sqrt{K}\rho)g, \tag{3.41}$$

其中 g 是 N 中的 Riemann 度量张量．应用映照 f，我们有 M 上的光滑函数 $u=h\circ f$，它当然是有界的．根据定理 3.6，对任何 $\varepsilon>0$，存在一点 $x\in M$，使 $\Delta u(x)<\varepsilon$．另一方面，由(3.41)式以及映照的复合公式(1.64)，

$$\begin{aligned}\Delta u &= \Delta(h\circ f) = \operatorname{Hess}(h)(f_*e_i, f_*e_i) + dh(\tau(f))\\ &\geqslant 2K(\cos\sqrt{K}\rho)e(f) + \sqrt{K}(\sin\sqrt{K}\rho)\langle \operatorname{grad}\rho, \tau(f)\rangle\\ &\geqslant \sqrt{K}(\cos\sqrt{K}R)\,(2\sqrt{K}\inf e(f) - m\tau_0\tan\sqrt{K}R),\end{aligned}$$

而上式的右端不可能为正．这就得到(3.38)式．

当 $K=0$ 时，我们只要对 M 上的函数 $\rho^2\circ f$ 进行计算，类似的讨论，可得到(3.39)式．当 $K<0$ 时，只要考虑 M 上的有界函数 $u=h\circ f$，其中 $h=1+\operatorname{ch}\sqrt{-K}\rho$． ∎

推论 3.11 设定理 3.10 中的 N 为截曲率有界 $K_1\leqslant K_{\bar{M}}\leqslant K_2$ 的流形 $\bar{M}$，f 是等距浸入 I，并且 M 中 Ricci 曲率的条件换成为数量曲率的条件，此时，(3.38)式、(3.39)式和(3.40)式也成立．

它是 Jörge-Xavier[70] 定理的推广．从(3.39)式也给出了 R^3 中具有曲率附加条件的有界极小曲面的不存在性．

定理 3.12[123],[17] 设 M 是完备非紧 R^n 中的浸入子流形，它具有平行平均曲率，并且数量曲率以 $-c(1+r^2\log^2(r+2))$ 为下界．如果高斯映照 γ: $M\to G_{m,n-m}$ 的象落在测地凸邻域 $B_R(y_0)\subset G_{m,n-m}$ 中，$R<\pi/2\sqrt{K}$（如果 $G_{m,n-m}$ 为球面时，$K=1$ 否则 $K=$

2)，那末，M一定是极小子流形。

证明 根据定理3.1，高斯映照 γ 是调和映照。而(3.38)式说明 $\inf e(\gamma)=0$。设 S 是 M 在 R^n 中第二基本形式模长平方，那末由(3.6)式说明

$$\inf S = 2\inf e(\gamma) = 0.$$

另一方面

$$\text{const} = |H|^2 \leqslant \frac{1}{m^2} S,$$

这就迫使 $H \equiv 0$。

将定理3.8和定理3.12和本节一开始所引的陈省身定理相比较，虽然我们在更一般情形下得到了结论，但多了 Ricci 曲率趋向 $-\infty$ 不能太快的条件。它究竟是本质的，还是技术性的尚待进一步研究。

§3.5 闵可夫斯基空间中类空超曲面的高斯象

设 R_1^{m+1} 是 $m+1$ 维闵可夫斯基空间，即 R^{m+1} 中赋于洛伦兹度量 $ds^2 = -(dx_0)^2 + (dx_1)^2 + \cdots + (dx_m)^2$。Calabi 首先研究它的类空极值超曲面的 Bernstein 问题[10]，并证明当 $m \leqslant 4$ 时，这种完备类空极值超曲面只可能是超平面。进一步，郑绍远和丘成桐惊人地证明了这个结论对任何 m 都成立[20]。以后，Nishikawa[81] 和 Ishihara[65] 从不同的角度都推广了郑—丘的 Bernstein 型定理。

对类时以及混合型极值曲面，问题变得更为困难，谷超豪等对此有一系列研究[42]、[43]、[44]。

对完备类空非零常平均曲率的超曲面，Treibergs 以及 Hano 和 Nomizu 给出了很多例子[115]、[50]。相应于 Hoffeman-Osserman-Schoen 的 R^3 中的著名定理(定理3.8和定理3.9)，如何用高斯映照的性质来刻划这种类空超曲面的性质呢？

设 M 是 R_1^{m+1} 中定向的类空超曲面，ν 是 M 在 R_1^{m+1} 中的单位

类时法向量场。对任何 $p\in M$，$|\nu(p)|^2=-1$，利用 R_1^{m+1} 中的平行移动将 $\nu(p)$ 平移到原点，我们得到 m 维双曲空间 $H^m(-1)$ 中的一点。如此，我们定义了高斯映照 $\gamma: M\to H^m(-1)$。Palmer 首先证明了下面的定理。

定理 3.13[87] 设 M 是 R_1^{m+1} 中类空具有非零常平均曲率 H 的超曲面。存在一个数 $\tau(m, H)>0$，当 M 在高斯映照下的象 $\gamma(M)$ 落在 $H^m(-1)$ 的半径为 $\tau_1<\tau$ 的测地球中时，M 不可能是完备的。

注意到，M 具有常平均曲率，那末，类似于欧氏空间情形，高斯映照 $\gamma: M\to H^m(-1)$ 是调和映照[64]。如果我们能证明 M 具有非负 Ricci 曲率，那末应用郑绍远关于调和映照的刘维尔定理[19]就可得到比定理 3.13 更强的结果。从上节讨论及下面的 (3.43) 式可以看到，我们用广义极值原理可以说明 M 具非负 Ricci 曲率。

事实上，我们可以将这个结果和郑绍远一丘成桐的关于闵可夫斯基空间类空极值超曲面的定理结合起来考虑，用平均曲率和高斯象的半径来估计超曲面 M 在 R_1^{m+1} 中的第二基本形的模长平方。再用广义极值原理来证明平均曲率一定为零。从而得到下面的定理。

定理 3.14[133] 设 M 是闵可夫斯基空间 R_1^{m+1} 中完备，具有常平均曲率的类空超曲面。如果它的高斯象在 $H^m(-1)$ 中有界，那么 M 一定是线性子空间。

注 定理 3.14 相当于外围空间是欧氏空间时的定理 3.8，它比定理 3.13 的结论强得多。

为证明定理 3.14，我们需要洛伦兹流形上的一些基本公式。

设 N 是 $(m+1)$ 维洛伦兹流形，它的洛伦兹度量 $\bar{g}$ 的符号为 $(-, +, \cdots, +)$。设 $\{e_0, e_1, \cdots, e_m\}$ 是 N 中局部洛伦兹幺正标架场，$\{\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_m\}$ 是对偶标架场，因而

$$\bar{g}=-\omega_0^2+\sum_i\omega_i^2.$$

我们约定指标变化范围为

$$1\leqslant i,\ j,\ \cdots\leqslant m,$$
$$0\leqslant\alpha,\ \beta,\ \cdots\leqslant n.$$

N的洛伦兹联络形式由下列方程所唯一确定

$$\begin{cases}d\omega_0=\omega_{0i}\Lambda\omega_i\\ d\omega_i=-\omega_{i0}\Lambda\omega_0+\omega_{ij}\Lambda\omega_j\\ \omega_{\alpha\beta}+\omega_{\beta\alpha}=0.\end{cases}\tag{3.42}$$

共变导数由下列方程所定义

$$De_0=\omega_{0i}e_i,$$
$$De_i=\omega_{ij}e_j-\omega_{i0}e_0.$$

N的曲率形式$\overline{\Omega}_{\alpha\beta}$定义为

$$\overline{\Omega}_{0i}=d\omega_{0i}-\omega_{0k}\Lambda\omega_{ki},$$
$$\overline{\Omega}_{ij}=d\omega_{ji}+\omega_{i0}\Lambda\omega_{0j}-\omega_{ik}\Lambda\omega_{kj},$$
$$\overline{\Omega}_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\omega_\gamma\Lambda\omega_\delta,$$

其中$\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$是曲率张量的分量。

设M是洛伦兹流形N的类空超曲面。取N的局部洛伦兹幺正标架场$e_0,\ \cdots,\ e_m$，使限制在M上时，$e_1,\ \cdots,\ e_m$是M的切向量。因此，将其对偶标架场限制于M时，$\omega_0=0$，M的诱导度量

$$g=\sum_i\omega_i^2,$$

相应的诱导结构方程是

$$d\omega_i=\omega_{ik}\Lambda\omega_k,\ \omega_{ij}+\omega_{ji}=0,$$
$$d\omega_{ij}=\omega_{ik}\Lambda\omega_{kj}-\omega_{i0}\Lambda\omega_{0j}+\overline{\Omega}_{ij},$$
$$\Omega_{ij}=d\omega_{ij}-\omega_{ik}\Lambda\omega_{kj}=-\frac{1}{2}R_{ijkl}\omega_k\Lambda\omega_l,$$

其中Ω_{ij}和R_{ijkl}表示M的曲率形式和曲率张量。根据Cartan引理

$$\omega_{i0}=h_{ij}\omega_j,$$

其中h_{ij}是M在N中第二基本形式的系数，从而有高斯方程

$$R_{ijkl}=\overline{R}_{ijkl}-(h_{ik}h_{jl}-h_{il}h_{jk}).$$

Ricci 曲率满足

$$R_{ik}=\overline{R}_{ik}+h_{ij}h_{jk}-mHh_{ik},$$

其中$H=\frac{1}{m}h_{ii}$是M在N中的平均曲率。如果N的 Ricci 曲率以C_N为下界，那末M的 Ricci 曲率也有下界

$$\mathrm{Ricci}_M\geqslant C_N-\frac{1}{4}m^2H^2. \tag{3.43}$$

设h_{ijk}表示h_{ij}的共变导数，由下式所定义

$$h_{ijk}\omega_k=dh_{ij}+h_{ik}\omega_{kj}+h_{kj}\omega_{ki}, \tag{3.44}$$

那末，我们有 Codazzi 方程

$$h_{ijk}-h_{ikj}=\overline{R}_{oijk}. \tag{3.45}$$

类似地，可定义h_{ijk}的共变导数h_{ijkl}，并从(3.44)式求外微分可得 Ricci 恒等式

$$h_{ijkl}-h_{ijlk}=h_{mj}R_{mikl}+h_{im}R_{mjkl}. \tag{3.46}$$

从(3.45)式和(3.46)式可得

$$\Delta h_{ij}=h_{kkij}+h_{mk}R_{mijk}+h_{im}R_{mkjk}+\overline{R}_{oijkk}+\overline{R}_{okikj},$$

其中

$$\overline{R}_{oijkl}\omega_l=d\overline{R}_{oijk}+\overline{R}_{oljk}\omega_{li}+\overline{R}_{oilk}\omega_{lj}+\overline{R}_{oijl}\omega_{lk}.$$

设$S=\sum\limits_{i,j}h_{ij}^2$是$M$在$N$中第二基本形式模长平方，那末

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S=&\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2+mh_{ij}H_{ij}+S^2-mHh_{ij}h_{jk}h_{ki}\\&+h_{ij}h_{km}\overline{R}_{mijk}+h_{ij}h_{im}\overline{R}_{mkjk}\\&+h_{ij}\overline{R}_{oijkk}+h_{ij}\overline{R}_{okikj}.\end{aligned}$$

当M为闵可夫斯基空间N中常平均曲率类空超曲面时

$$\frac{1}{2}\Delta S\geqslant\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2+S^2-m|H|S^{\frac{3}{2}}. \tag{3.47}$$

下面我们用平均曲率以及高斯映照象的半径来估计S。设r和$\tilde{r}$分别表示M以及$H^m(-1)$中从$x_0\in M$及$\tilde{x}_0\in H^m(-1)$点出发的距离函数。设$B(a)$以及$\tilde{B}(a)$表示以x_0以及$\tilde{x}_0$为中心a为半径的闭测地球。在$B(a)$中定义高斯映照γ：$M\to H^m(-1)$的最大模为

$$\mu(\gamma, a) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \max\{\tilde{r}(\gamma(x))\}; x \in B(a) \subset M\}.$$

对固定的 a, 取 $b > \operatorname{ch}(\mu(\gamma, a))$, 定义函数 $f: B(a) \to R$ 为

$$f = \frac{(a^2 - r^2)^2 S}{(b - h \circ r)^2},$$

其中 S 是 M 在 R_1^{m+1} 中第二基本形模长平方, $h = \operatorname{ch} \tilde{r}$.

由于 $f|_{\partial B(a)} = 0$, f 必在 $B(a)$ 的内点 $z \in B(a)$ 达到最大值, 即 $f \leqslant f(z)$. 利用支撑函数技巧, 不妨设 f 在 z 附近是 C^2 可微, 并设 $S(z) \neq 0$. 那末, 从

$$\nabla f(z) = 0,$$
$$\Delta f(z) \leqslant 0.$$

我们在 z 点有

$$-\frac{2\nabla r^2}{a^2 - r^2} + \frac{\nabla S}{S} + \frac{2\nabla(h \circ r)}{b - h \circ r} = 0, \tag{3.48}$$

$$\frac{-2|\nabla r^2|^2}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{2\Delta r^2}{a^2 - r^2} + \frac{\Delta S}{S} - \frac{|\nabla S|^2}{S^2} + \frac{2\Delta(h \circ r)}{b - h \circ r} + \frac{2|\nabla(h \circ r|^2}{(b - h \circ r)^2} \leqslant 0. \tag{3.49}$$

从 Schwarz 不等式:

$$\frac{|\nabla S|^2}{S} \leqslant 4 \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2,$$

再由(3.47)式得到

$$\Delta S \geqslant \frac{|\nabla S|^2}{2S} + 2S^{\frac{1}{2}}(S^{\frac{1}{2}} - m|H|),$$

所以

$$\frac{\Delta S}{S} - \frac{|\nabla S|^2}{S^2} \geqslant \frac{-2|\nabla(h \circ r)|^2}{(b - h \circ r)^2} - \frac{4|\nabla(h \circ r)|\nabla r^2|}{(b - h \circ r)(a - r^2)} - \frac{2|\nabla r^2|^2}{(a^2 - r^2)^2} + 2S^{\frac{1}{2}}(S^{\frac{1}{2}} - m|H|). \tag{3.50}$$

将(3.50)式代入(3.49)式得到

$$\frac{-\Delta r^2}{a^2 - \gamma^2} - \frac{2|\nabla r^2|^2}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{2|\nabla(h \circ r)||\nabla r^2|}{(b - h \circ r)(a^2 - r^2)} + \frac{\Delta(h \circ r)}{b - h \circ r} + S^{\frac{1}{2}}(S^{\frac{1}{2}} - m|H|) \leqslant 0. \tag{3.51}$$

容易看出

$$\gamma_* e_i = h_{ij} e_j,$$

$$|\nabla(h\circ r)|^2 = \langle \operatorname{grad} h, \gamma_* e_i\rangle \langle \operatorname{grad} h, \gamma_* e_i\rangle \leqslant (\operatorname{sh}^2 \tilde{r}) S. \tag{3.52}$$

众所周知

$$\operatorname{Hess} h = (\operatorname{ch} \tilde{r}) \tilde{g},$$

其中 $\tilde{g}$ 是 $H^m(-1)$ 中的度量张量，由此可得

$$\begin{aligned} \Delta(h\circ r) &= \operatorname{Hess}(h)(\gamma_* e_i, \gamma_* e_i) + \langle \operatorname{grad} h, \nabla_{e_i} \gamma_* e_i\rangle \\ &= (\operatorname{ch} \tilde{r}) S + \langle \operatorname{grad} h, h_{iji} e_j\rangle = (\operatorname{ch} \tilde{r}) S. \end{aligned} \tag{3.53}$$

上式推导中已考虑到 Codazzi 方程以及常平均曲率的条件。

由于M的 Ricci 曲率以 $-m^2H^2/4$ 为下界，我们可以用 Laplace 比较定理，并得到

$$\Delta r^2 \leqslant 2 + 2(m-1) cr(\coth cr) \leqslant 2m + 2(m-1) cr, \tag{3.54}$$

其中 $c = \frac{m}{2}|H|$。将(3.52)式、(3.53)式和(3.54)式代入(3.51)式，我们有

$$\left(\frac{\operatorname{ch} \tilde{r}}{b - \operatorname{ch} \tilde{r}} + 1\right) S - \left(\frac{4(\operatorname{sh} \tilde{r}) r}{(b - \operatorname{ch} \tilde{r})(a^2 - r^2)} + m|H|\right)\sqrt{S} - \left(\frac{2(m + (m-1) cr)}{a^2 - r^2} + \frac{8r^2}{(a^2 - r^2)^2}\right) \leqslant 0. \tag{3.55}$$

容易看出，对正系数 a, b, c，当 $ax^2 - bx - c \leqslant 0$ 时，

$$x^2 \leqslant k\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{c}{a}\right),$$

其中 k 是一个正的绝对常数。下面各式中，k 不一定相同。这样，在 z 点，我们有

$$S \leqslant k\left[\frac{\left(\frac{4(\operatorname{sh} \tilde{r}) r}{(b - \operatorname{ch} r)(a^2 - r^2)} + m|H|\right)^2}{\left(\frac{\operatorname{ch} \tilde{r}}{b - \operatorname{ch} \tilde{r}} + 1\right)^2} + \frac{2(m + (m-1) cr)(a^2 - r^2) + 8r^2}{\left(\frac{\operatorname{ch} \tilde{r}}{b - \operatorname{ch} \tilde{r}} + 1\right)(a^2 - r^2)^2}\right],$$

并且

$$f(z)\leqslant k\left[\frac{\left(\frac{4(\operatorname{sh}\mu)a}{b-\operatorname{ch}\mu}+ma^2|H|\right)^2}{\left(\frac{1}{b}+1\right)^2(b-\operatorname{ch}\mu)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{2(ma^2+(m-1)ca^3)+8a^2}{\left(\frac{1}{b}+1\right)(b-\operatorname{ch}\mu)^2}\right].$$

取 $b=2\operatorname{ch}\mu$，可得

$$f(z)\leqslant k\left[\frac{(4(\operatorname{sh}\mu)a+m(\operatorname{ch}\mu)a^2|H|)^2}{(1+2\operatorname{ch}\mu)^2(\operatorname{ch}\mu)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{(m+4)a^2+(m-1)ca^3}{(1+2\operatorname{ch}\mu)(\operatorname{ch}\mu)}\right],$$

所以，对任何 $x\in B(a)$，

$$S(x)=\frac{(b-\operatorname{ch}\tilde{r})^2f(x)}{(a^2-r^2)^2}\leqslant\frac{(2\operatorname{ch}\mu)^2}{(a^2-r^2)^2}f(z)$$

$$\leqslant k\left(\frac{(4(\operatorname{sh}\mu)a+m(\operatorname{sh}\mu)a^2|H|)^2}{(1+2\operatorname{ch}\mu)^2(a^2-r^2)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{(m+4)(\operatorname{ch}\mu)a^2+(m-1)(\operatorname{ch}\mu)ca^3}{(1+2\operatorname{ch}\mu)(a^2-r^2)^2}\right), \quad (3.56)$$

其中 $c=\frac{m}{2}|H|$，这就得到了所要的估计。

如果高斯象有界，即 $\mu(\gamma, a)$ 有界。这样，在 M 上有有界函数 $h=\operatorname{ch}\tilde{r}(r(x))$。另一方面，从(3.43)式，$M$ 的 Ricci 曲率有下界 $-\frac{m^2}{4}H^2$，因此，由广义极值原理，对任何 $\varepsilon>0$，$p_0\in M$，总存在 p，使

$$h(p)\geqslant h(p_0),\ |\operatorname{grad}h|_p<\varepsilon \quad 和 \quad \Delta h|_p<\varepsilon.$$

但从(3.53)式，

$$\Delta h=(\operatorname{ch}\tilde{r})S.$$

这意味着

$$\inf S=0.$$

另一方面

$$H^2\leqslant\frac{S}{m},$$

并且H是常数，这迫使$H=0$。再代入(3.56)式可得

$$S(x)\leqslant k\left[\frac{16(\mathrm{sh}^2\mu)a^2}{(1+2\mathrm{ch}\,\mu)^2(a^2-r^2)^2}+\frac{(m+4)(\mathrm{ch}\,\mu)a^2}{(1+2\,\mathrm{ch}\,\mu)(a^2-r^2)^2}\right]. \tag{3.57}$$

固定x，令a趋向于∞，就导致$S(x)=0$，其中x是任意的。这就完成了定理3.14的证明。

§3.6 伪欧氏空间中类空子流形的高斯象

设R_n^{m+n}是$(m+n)$维指标为n的伪欧氏空间，即R^{m+n}中赋予度量

$$ds^2=(dx_1)^2+\cdots+(dx_m)^2-(dx_{m+1})^2-\cdots-(dx_{m+n})^2.$$

设M是R_n^{m+n}中的m维定向类空子流形。类似地，我们可以定义广义高斯映照$\gamma: M\to G_{m,n}^n$。类似于§2.4讨论，$G_{m,n}^n$相当于第一类有界对称域，但是所有复数改成实数。这是一类Cartan-Hadamard流形。作为定理3.14的推广，有下面定理。

定理3.15[1] 设M是R_n^{m+n}中m维完备具平行平均曲率的类空子流形。如果它的高斯象落在$G_{m,n}^n$的紧致子集上，那末，M一定是R_n^{m+n}的线性子空间。

证明 类似于超曲面情形，从子流形的高斯方程得到M的Ricci曲率以$-\frac{1}{4}m^2|H|^2$为下界，其中H为M在R_n^{m+n}中的平均曲率向量。由文献[64]的定理，γ为调和映照，再从(3.39)式导致

$$\inf e(\gamma)=0.$$

那末，和证明定理3.12一样，我们有$H\equiv 0$。这就知道，M具有非负Ricci曲率，根据文献[19]中的调和映照的刘维尔定理得到γ是常值映照，即M是R_n^{m+n}的线性子空间。 ∎

我们来考察定理3.9在伪欧氏空间中相应的结果。考虑$R_1^{?}$

中的类空定向曲面。这时，它的高斯映照下的象流形正好是$G^2_{2,2}$，即第四类有界对称域$\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}(2)$。

3.6.1　$G^2_{2,2}$的几何

首先约定指标取值范围

$$a,\ b,\ \cdots=1,\ \cdots,\ 4$$

$$i,\ j,\ \cdots=1,\ 2;\ s,\ t,\ \cdots=3,\ 4.$$

设$V=\Lambda^2(\mathbb{R}^4_2)$是外2次向量组成的6维线性空间。从$\mathbb{R}^4_2$中诱导出如下内积，对$V$中的任何二个可分2次向量$u\wedge v$和$u'\wedge v'$，

$$\langle u\wedge v,\ u'\wedge v'\rangle=\langle uv'\rangle\langle u'v\rangle-\langle uu'\rangle\langle v,\ v'\rangle. \qquad (3.58)$$

这样V是指标为2的伪欧氏空间。它可分解成二个3维闵可夫斯基空间V_+和V_-的直和(符号均为$(-,\ +,\ +)$)。设$\{e_i,\ e_s\}$是$\mathbb{R}^4_2$中的幺正基，其中e_i是类空向量，e_s是类时向量。那末，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(e_1\wedge e_2\pm e_3\wedge e_4),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1\wedge e_3\pm e_2\wedge e_4),$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(e_1\wedge e_4\mp e_2\wedge e_3) \qquad (3.59)$$

构成V_+和V_-的幺正基。

对任何$P^2\in G^2_{2,2}$，u和v张成P^2。$u\wedge v\in V$在相差正因子下确定了P^2。所以P^2可看成V中长度为-1的可分2次向量。

设

$$u=u_ae_a,\ v=v_ae_a,$$

那末

$$u\wedge v=\sum_{a<b}p_{ab}e_a\wedge e_b,$$

其中$p_{ab}=u_av_b-v_au_b$是Plücker-Grassmann坐标。由于

$$u\wedge v\wedge u\wedge v=0,$$

应

$$p_{12}p_{34}-p_{13}p_{24}+p_{14}p_{23}=0. \qquad (3.60)$$

这就是2次向量$\sum\limits_{a<b}p_{ab}e_a\wedge e_b$为可分向量的条件。当$|u\wedge v|=-1$时，

$$-p_{12}^2+p_{13}^2+p_{14}^2+p_{23}^2+p_{24}^2-p_{34}^2=-1. \qquad (3.61)$$

令

$$p_{12}=x_1+y_1,\ p_{13}=x_2+y_2,\ p_{14}=x_3+y_3,$$
$$p_{34}=x_1-y_1,\ p_{24}=x_2-y_2,\ p_{23}=y_3-x_3.$$

那末

$$\begin{aligned}u\wedge v=&x_1(e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4)+x_2(e_1\wedge e_3+e_2\wedge e_4)\\&+x_3(e_1\wedge e_4-e_2\wedge e_3)+y_1(e_1\wedge e_2-e_3\wedge e_4)\\&+y_2(e_1\wedge e_3-e_2\wedge e_4)+y_3(e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3),\end{aligned}$$

并且(3.60)式和(3.61)式化为

$$-x_1^2+x_2^2+x_3^2=-y_1^2+y_2^2+y_3^2,$$

$$-x_1^2+x_2^2+x_3^2-y_1^2+y_2^2+y_3^2=-\frac{1}{2}.$$

由于$G_{2,2}^2$是类空平面的全体，在上述对应下，它在V中的象落在$x_1>0$, $y_1>0$的连通分支上，即落在$H^2\times H^2$中，其中每个H^2是常曲率为-2的双曲平面。反之，对$H^2\times H^2$上的任意点$(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$ $(x_1>0,\ y_1>0)$，按上述对应，可以得到双向量

$$\begin{aligned}x_1(e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4)&+x_2(e_1\wedge e_3+e_2\wedge e_4)+x_3(e_1\wedge e_4-e_2\wedge e_3)\\&+y_1(e_1\wedge e_2-e_3\wedge e_4)+y_2(e_1\wedge e_3-e_2\wedge e_4)\\&+y_3(e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3).\end{aligned}$$

它一定是可分的，即可写成

$$\left(e_1-\frac{y_3-x_3}{x_1+y_1}e_3-\frac{x_2-y_2}{x_1+y_1}e_4\right)$$

$$\wedge((x_1+y_1)e_2+(x_2+y_2)e_3+(x_3+y_3)e_4),$$

考虑由

$$u=(x_1+y_1)e_1-(y_3-x_3)e_3-(x_2-y_2)e_4$$

和 $$v=(x_1+y_1)e_1+(x_2+y_2)e_3+(x_3+y_3)e_4$$

张成的平面p^2，从直接计算可知$\langle u, u\rangle+\langle v, v\rangle>0$，从而不妨设$u$是类空向量。由于$u\wedge v$在$V$中的长度为负的，$v$一定也是类空向量，从而，$p^2$是类空平面。

所以，$G_{2,2}^2$微分同胚于$H^2\times H^2$。事实上，$G_{2,2}^2$作为齐次空间等价于$H^2\times H^2$是熟知的(见文献[52])。

设$\{\bar{e}_i, \bar{e}_s\}$是R_2^4中伪幺正标架场，其对偶标架场为$\{\omega_i, \omega_s\}$，使度量为$\bar{g}=\sum_i \omega_i^2-\sum_s \omega_s^2$。洛伦兹联络$\omega_{ab}$由下列方程所唯一确定

$$\begin{cases} d\omega_i=\omega_{ij}\wedge\omega_j-\omega_{is}\wedge\omega_s \\ d\omega_s=\omega_{si}\wedge\omega_i-\omega_{st}\wedge\omega_t \\ d\omega_{ab}=\varepsilon_c\omega_{ac}\wedge\omega_{cb},\ \omega_{ab}+\omega_{ba}=0, \end{cases} \tag{3.62}$$

其中$\varepsilon_i=1$, $\varepsilon_s=-1$。而共变导数由

$$D\bar{e}_i=\omega_{ij}\bar{e}_j-\omega_{is}\bar{e}_s,$$

$$D\bar{e}_s=\omega_{sj}\bar{e}_j-\omega_{st}\bar{e}_t,$$

所定义。在$G_{2,2}^2$中的典范度量为

$$ds_G^2=\sum_{i,s}(\omega_{si})^2,$$

它可分解为$ds_1^2+ds_2^2$，其中

$$ds_1^2=\frac{1}{2}[(\omega_{13}+\omega_{24})^2+(\omega_{14}-\omega_{23})^2], \tag{3.63}$$

和

$$ds_2^2=\frac{1}{2}[(\omega_{13}-\omega_{24})^2+(\omega_{14}+\omega_{23})^2]. \tag{3.64}$$

由于

$$D(\bar{e}_1\wedge\bar{e}_2+\bar{e}_3\wedge\bar{e}_4)=(\omega_{13}+\omega_{24})(\bar{e}_1\wedge\bar{e}_4-\bar{e}_2\wedge\bar{e}_3)$$
$$+(\omega_{23}-\omega_{14})(\bar{e}_2\wedge\bar{e}_4+\bar{e}_1\wedge\bar{e}_3),$$

所以ds_1^2恰为$G_{2,2}^2$在第一个因子流形上的诱导度量。从结构方程(3.62)得到ds_1^2的Levi-Civita联络形式是$-(\omega_{12}+\omega_{34})$，而且对应的高斯曲率为$-2$。类似地，$ds_2^2$是$G_{2,2}^2$在第二个因子上的诱导度量。因此，$G_{2,2}^2$等距于$H^2\times H^2$。

3.6.2　高斯映照

设$f: M\to R_2^4$是定向类空曲面，沿M取R_2^4的局部幺正标架场$\{e_i, e_s\}$，使e_i和M相切，对偶标架场为$\{\omega_i, \omega_s\}$。那末，M上的诱导度量为$g=\sum_i\omega_i^2$，M上诱导结构方程为

$$d\omega_i=\omega_{ij}\wedge\omega_j,\ \omega_{ij}+\omega_{ji}=0,$$

$$d\omega_{ij}=\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}-\omega_{is}\wedge\omega_{sj},$$

$$\Omega_{ij}=d\omega_{ij}-\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}=-\frac{1}{2}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l.$$

由 Cartan 引理

$$\omega_{si}=h_{sij}\omega_j,$$

其中 h_{sij} 是 M 在 R^4_2 中第二基本形式的系数。M 的平均曲率向量 H 定义为

$$H=\frac{1}{2}h_{sii}e_s,$$

高斯方程现在为

$$R_{ijkl}=-(h_{sik}h_{sjl}-h_{sil}h_{sjk}),\tag{3.65}$$

Ricci 曲率为

$$R_{ij}=R_{kikj}=-(h_{skk}h_{sij}-h_{ski}h_{skj}).\tag{3.66}$$

在法丛 NM 上有法联络 ω_{st}，即有

$$d\omega_{st}=-\omega_{sr}\wedge\omega_{rt}+\Omega_{st},$$

$$\Omega_{st}=-\frac{1}{2}R_{stij}\omega_i\wedge\omega_j,$$

$$R_{stij}=-(h_{ski}h_{tkj}-h_{skj}h_{tki}).\tag{3.67}$$

h_{sij} 的共变导数定义为

$$h_{sijk}\omega_k=dh_{sij}+h_{sil}\omega_{lj}+h_{slj}\omega_{li}-\omega_{tij}\omega_{ts}.$$

显然，$h_{sijk}=h_{sikj}$，所以 h_{sijk} 关于 i，j，k 全对称。如果

$$DH=\frac{1}{2}h_{siik}\omega_k e_s\equiv 0,\tag{3.68}$$

那末，M 称为平行平均曲率的类空曲面。

$G^2_{2,2}$ 关于 ds^2_G 的 Levi-Civita 联络为

$$\omega_{(si)(tj)}=\delta_{st}\omega_{ij}-\delta_{ij}\omega_{st},\tag{3.69}$$

类似于(3.5)式，我们有

$$\gamma^*\omega_{si}=h_{sij}\omega_j.\tag{3.70}$$

从(3.68)式和(3.70)式，即知 γ 是调和(全测地)的充要条件是 M 具平行平均曲率(平行第二基本形式)。

设 $\pi_1: G^2_{2,2}\to H^2$ 是到第一个因子的投影，π_2 则到第二因子的投影。定义 $\gamma_i=\pi_i\circ\gamma$。从(3.63)式和(3.69)式得到

$$\begin{cases}\gamma_1^*(\omega_{13}+\omega_{24})=(h_{311}+h_{421})\omega_1+(h_{312}+h_{422})\omega_2\\ \gamma_1^*(\omega_{23}-\omega_{14})=(h_{411}-h_{321})\omega_1+(h_{412}-h_{322})\omega_2.\end{cases}\tag{3.71}$$

那末(参见(3.1)式)

$$\begin{cases}a_{11}=\frac{\sqrt{2}}{2}(h_{311}+h_{421}),\quad a_{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}(h_{312}+h_{422})\\ a_{21}=\frac{\sqrt{2}}{2}(h_{411}-h_{321}),\quad a_{22}=\frac{\sqrt{2}}{2}(h_{412}-h_{322}).\end{cases}\tag{3.72}$$

并且

$$a_{111}=\frac{\sqrt{2}}{2}(h_{3111}+h_{4211}),\ a_{112}=\frac{\sqrt{2}}{2}(h_{3112}+h_{4212}),$$

$$a_{121}=\frac{\sqrt{2}}{2}(h_{3121}+h_{4221}),\ a_{122}=\frac{\sqrt{2}}{2}(h_{3122}+h_{4222}),$$

$$a_{211}=\frac{\sqrt{2}}{2}(h_{4111}-h_{3211}),\ a_{212}=\frac{\sqrt{2}}{2}(h_{4112}-h_{3212}),$$

$$a_{221}=\frac{\sqrt{2}}{2}(h_{4221}-h_{3221}),\ a_{222}=\frac{\sqrt{2}}{2}(h_{4122}-h_{3222}).$$

由此可见，γ_1 调和的条件是

$$H_{13}+H_{24}=0,\ H_{14}-H_{23}=0,\tag{3.73}$$

其中 H_{is} 是 DH 的分量。类似地，γ_2 调和的条件为

$$H_{13}-H_{24}=0,\quad H_{14}+H_{23}=0.$$

不难验证，这些条件和标架选取无关。

命题 3.16 如果 M 是 R_2^4 中具平行平均曲率的类空曲面，则 γ_1 和 γ_2 均是调和映照。

3.6.3 平行平均曲率类空曲面的高斯象

定理 3.17[138] 设 M 是完备 Riemann 流形，它的 Ricci 曲率以 $-c(1+r^2\log^2(r+2))$ 为下界，其中 r 是从固定点 $x_0\in M$ 的距离函数。设 H^k 是双曲空间 H^n 中的 k 维完备全测地子流形，$k=0,1,\cdots,n-1$（当 $k=0$ 时，看作 H^n 中的一个固定点 $y_0\in H^n$），设 $B_R(H^k)\in H^n$ 是 H^k 的半径为 R 的管状邻域。如果 f: $M\to B_R(H^k)$ 是能量密度为 $e(f)$ 的调和映照，那末，或者 $\inf e(f)=0$，

或者 $f(M)\in H^k$。特别地，设 $f: M\to\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}(2)$ 是调和映照，$f_i=\pi_i\circ f(i=1,2)$。假设 $f_i(M)\subset B_R(H^k)(k=0,1)$。那末，或者 $\inf e(f_i)=0$，或者 $f_i(M)\subset H^k$。

证明 当 $k=0$ 时，设 $\tilde{r}$ 是 H^n 中从 $y_0\in H^n$ 出发的距离函数。众所周知

$$\mathrm{Hess}(\tilde{r})=\coth\tilde{r}(\tilde{g}-d\tilde{r}\otimes d\tilde{r}),$$

其中 $\tilde{g}$ 是 H^n 中的度量张量。因此，

$$\mathrm{Hess}(\cosh\tilde{r})=(\cosh\tilde{r})\tilde{g}.$$

从复合公式(1.64)

$$\begin{aligned}\Delta(\cosh\tilde{r}\circ f)&=\mathrm{Hess}(\cosh\tilde{r})(f_*e_i,f_*e_i)\\&+d(\cosh\tilde{r})(\tau(f))=\cosh\tilde{r}\langle f_*e_i,f_*e_i\rangle\\&=2(\cosh\tilde{r})e(f).\end{aligned}\tag{3.74}$$

由于 $f(M)\subset B_R(y_0)$，$\cosh\tilde{r}\circ f$ 以 $\cosh R$ 为上界。根据定理3.6，对任何 $\varepsilon>0$，存在点列 x_k，使 $\Delta(\cosh\tilde{r}\circ f)<\varepsilon$，这意味着 $\inf e(f)=0$。

当 $k>0$ 时，设 $\tilde{r}$ 是从 H^k 出发的距离函数，那末 $\tilde{r}\circ f$ 是 M 上以 R 为上界的光滑函数。由定理3.6，存在点列 x_k 满足定理的要求。设 e_i 是局部幺正标架场，那末

$$\begin{aligned}\Delta(\tilde{r}\circ f)&=\mathrm{Hess}(\tilde{r})(f_*e_i,f_*e_i)+d\tilde{r}(\tau(f))\\&=\mathrm{Hess}(\tilde{r})(f_*e_i,f_*e_i).\end{aligned}\tag{3.75}$$

设 $\{i_a\}$ 是 $\{i\}$ 的子集，余集为 $\{i_s\}$，使 $f_*e_{i_a}$ 平行于 $\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}$，$f_*e_{i_s}\in\Gamma(TN_{\tilde{r}})$，其中 $N_{\tilde{r}}$ 是距离 H^k 为 r 的 H^n 的等参超曲面。$N_{\tilde{r}}$ 的主曲率是 $-\tanh\tilde{r}$ 和 $-\coth\tilde{r}$（当 $n=2$ 时，曲率为 $-\tanh\tilde{r}$）。从(3.75)式知

$$\Delta(\tilde{r}\circ f)(x_k)\geqslant\tanh\tilde{r}\langle f_*e_{i_s},f_*e_{i_s}\rangle|_{x_k},\tag{3.76}$$

当 $k\to\infty$ 时，$\tilde{r}\circ f$ 趋于它的上确界，$|\nabla\tilde{r}\circ f|$ 趋于0，因而

$$\begin{aligned}\langle f_*e_{i_a},f_*e_{i_a}\rangle&=\left\langle f_*e_{i_a},\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\right\rangle\left\langle f_*e_{i_a},\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\right\rangle\\&=\langle\nabla(\tilde{r}\circ f),e_{i_a}\rangle\langle\nabla(\tilde{r}\circ f),e_{i_a}\rangle\\&\leqslant|\nabla(\tilde{r}\circ f)|^2<\varepsilon,\end{aligned}\tag{3.77}$$

将(3.77)式代入(3.76)式，对充分大的 k，我们有

$$\Delta(\tilde{r}\circ f)(x_k)\geqslant[\sup(\tanh\tilde{r})-\varepsilon](2e(f)-\varepsilon).\qquad(3.78)$$

由此可见，如果 $\inf e(f)=c>0$，R 必须为 0。这就完成了定理的证明。 ∎

定理 3.18[133] 设 M 是 $\mathbb{R}_2^4$ 中完备定向具非零平行平均曲率的类空曲面。那末，它在 γ_1 和 γ_2 的象都不可能有界；如果在 γ_1(或 γ_2) 下的象落在 H^1 在 H^2 的管状邻域，那么 M 或者是某闵可夫斯基空间 $\mathbb{R}_1^3\subset\mathbb{R}_2^4$ 中的双曲柱面 $H^1(c)\times\mathbb{R}$，或者是二个双曲线的乘积 $H^1\times H^1$。

证明 沿 M 取 $\mathbb{R}_2^4$ 的局部幺正标架场 $\{e_i, e_s\}$，使 e_i 和 M 相切，而 e_3 为单位平均曲率向量 $\frac{H}{|H|}$ 由于 e_3 在法丛中平行，

$$\omega_{34}=0,$$

因此 h_{3ij} 和 h_{4ij} 可同时对角化。取 e_i，使 $e_i(p)$ 为 $p\in M$ 的主方向时，那么在 p 点有

$$\begin{cases}a_{11}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}h_{311}, & a_{12}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}h_{422}\\[2ex] a_{21}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}h_{411}, & a_{22}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}h_{322},\end{cases}\qquad(3.79)$$

并且

$$e(\gamma_1)=\frac{1}{4}(h_{311}^2+h_{322}^2+h_{411}^2+h_{422}^2)=\frac{1}{2}e(\gamma).$$

如果 $\gamma_1(M)$ 在 H^2 中有界，根据命题 3.16 和定理 3.17，必定有 $\inf e(\gamma_1)=0$，从而 $\inf e(\gamma)=0$。设 S 是 M 在 $\mathbb{R}_2^4$ 中第二基本形长度平方，那末，$\inf S=0$，这和 $|H|^2=\text{const}\neq 0$ 相矛盾。所以 γ_i 不可能有界。

若 $\gamma_1(M)\subset B_R(H^1)$，并且由于 $\inf e(\gamma_1)\neq 0$，从定理 3.17 得到 $\gamma_1(M)\subset H^1$，因此 $\operatorname{rank}\gamma_1<2$，$\det(a_{ij})=0$，即 M 的高斯曲率 $K=0$。

取任一点 $p\in M$ 附近的局部坐标，使 $ds^2=du_1^2+du_2^2$，并使

$\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p$为$p$点的二个主方向，且取$p$点附近的局部标架场

$$e_i=\frac{\partial}{\partial u_i}.$$

那末，$\omega_{12}=0$。

设$z=u_1+iu_2$

$$H_s=\frac{1}{2}(h_{s11}-h_{s22})-ih_{s12}.$$

那末，考虑到M具平行平均曲率

$$dH_s\wedge dz=(H_{s2}+iH_{s1})\omega_1\wedge\omega_2=0.$$

因此H_s为全纯函数。并且当z变成$e^{i\theta}z$时，H_s变成$e^{-2i\theta}H_s$。

(1) 如果$H_4\equiv 0$，那末，$h_{411}=h_{422}=0$，并且

$$d(e_1\wedge e_2\wedge e_3)=-\omega_{14}e_4\wedge e_2\wedge e_3-\omega_{24}e_1\wedge e_4\wedge e_3=0.$$

所以，M化为落在$\mathbb{R}^3_1\subset\mathbb{R}^4_1$中的类空常平均曲率曲面，它的高斯象在$\mathbb{H}^1$上。因此，一定有一个主曲率为0，而另一主曲率则为$2|H|$。在$\mathbb{R}^3_1$中存在标架场，它限制于$M$时，联络形式为

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & -2|H|\\ 0 & 0 & 0\\ 2|H| & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{3.80}$$

在$\mathbb{R}^2_1$中，对$c>0$，定义

$$\mathbb{H}^1(c)=\left\{x^2-y^2=-\frac{1}{c^2},\ x>0\right\}.$$

取e为它的单位切向，n为它的单位法向，那末，$n=cX$，其中$X=(x,y)$为位置向量。显然

$$dX=\omega e,$$

$$\langle dn,e\rangle=c\langle dX,e\rangle=c\omega,$$

那末，$\mathbb{R}^2_1$中的联络形式限制于$\mathbb{H}^1(-c)$时为

$$\begin{pmatrix}0 & -c\omega\\ c\omega & 0\end{pmatrix}. \tag{3.81}$$

从(3.80)式和(3.81)式，根据 Frobenius 定理，按标准的论证办法可知，至多相差$\mathbb{R}^3_1$中的一个运动，M是$\mathbb{H}^1(-2|H|)\times\mathbb{R}$的开

子流形。再由M的完备性，它必合同于$E^1\times\mathbf{R}$。

(2) 若$H_4\neq 0$，令

$$\frac{H_3}{H_4}=\frac{H_3\overline{H}_4}{|H_4|^2},$$

而

$$\operatorname{Im}(H_3\overline{H}_4)=\frac{1}{2}(h_{322}h_{412}-h_{311}h_{412}+h_{312}h_{411}-h_{312}h_{422})=0,$$

这里因考虑到法丛的平坦性。这样$\frac{H_3}{H_4}$为实函数，也是亚纯函数，只可能是常数k，并且是M上整体定义的常数。我们有

$$H_3=kH_4,$$

$$|H_3|^2+|H_4|^2=|H|^2+k=|H|^2,$$

所以，

$$|H_4|^2=\frac{1}{1+k^2}|H|^2$$

为常数，又考虑到H_4是解析函数，H_4必为常数。因此

$$h_{412}=h_{412}(p)=0,$$

并且

$$h_{4ij}=\begin{pmatrix}c|H| & 0\\ 0 & -c|H|\end{pmatrix},\tag{3.82}$$

这里$c=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$。考虑到$h_{311}+h_{322}=2|H|$，

$$h_{3ij}=\begin{pmatrix}(1+kc)|H| & 0\\ 0 & (1-kc)|H|\end{pmatrix}.\tag{3.83}$$

因此，在γ_1作用下有

$$(a_{Ai})=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}(kc+1)|H| & -c|H|\\ c|H| & (kc-1)|H|\end{pmatrix}.$$

由于$\det(a_{Ai})=0$，存在θ使

$$\cos\theta\begin{pmatrix}(kc+1)|H|\\ c|H|\end{pmatrix}+\sin\theta\begin{pmatrix}-c|H|\\ (kc-1)|H|\end{pmatrix}=0$$

作法丛中的旋转

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_3 \\ \bar{e}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}.$$

那末

$$h_{3ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}, \quad h_{4ij} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

并且

$$d(e_1 \wedge e_4) = -h_{311}\omega_1 e_3 \wedge e_4 + h_{422}\omega_2 e_1 \wedge e_2 = 0,$$

$$d(e_2 \wedge e_3) = -h_{422}\omega_2 e_4 \wedge e_3 + h_{311}\omega_1 e_2 \wedge e_1 = 0.$$

这说明 e_1, e_4 张成固定平面，e_2, e_3 也张成固定平面，并且，在 R^4_2 中存在标架场，它限制于M时，联络形式为

$$(\omega_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -H_1\omega_1 \\ 0 & 0 & -H_2\omega_2 & 0 \\ 0 & H_2\omega_2 & 0 & 0 \\ H_1\omega_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.84}$$

因此，M合同于 $H^1(-H_1) \times H^1(-H_2)$. ∎

注 定理3.18可以看成定理3.9在伪欧氏空间的相应结果.

第 4 章

调和映照和全纯映照

调和映照理论的一个重要方面是它与全纯映照的关系，我们先说明全纯映照是一类特殊的调和映照，然后证明一些调和映照的全纯性定理。

§4.1 部 分 能 量

设M和N是殆复流形，J 和 J' 是对应的殆复结构，那么，M 和 N 的切空间的复化空间按 J 的特征空间可分解为

$$TM^C = TM^{1,0}\oplus TM^{0,1},$$

类似地，

$$TN^C = TM^{1,0}\oplus TN^{0,1}.$$

设 $f: M\to N$ 是光滑映照，我们因此可以定义

$$\partial f: TM^{1,0}\to TN^{1,0},$$
$$\bar\partial f: TM^{0,1}\to TN^{1,0},$$
$$\partial \bar f: TM^{1,0}\to TN^{0,1},$$
$$\bar\partial \bar f: TM^{0,1}\to TN^{0,1},$$

使得

$$df|_{TM^{1,0}} = \partial f + \partial\bar f,$$
$$df|_{TM^{0,1}} = \bar\partial f + \bar\partial\bar f.$$

不难验证 $\overline{\partial f} = \bar\partial\bar f$，$\partial\bar f = \overline{\bar\partial f}$。

设 $X\in TM$，那么 $X' = X - iJX\in TM^{1,0}$，

$$X'' = X + iJX\in TM^{0,1},$$

$$\partial f(X') = f_*X - i f_*JX|_{TN^{1,0}}$$

$$=\frac{1}{2}(f_*X-if_*JX-iJ'f_*X-J'f_*JX),$$

$$\partial\bar{f}(X')=\frac{1}{2}(f_*X-if_*JX+iJ'f_*X+J'f_*JX).$$

设 $f: M\to N$ 是光滑映照，如果 $f_*J\equiv J'f_*$，那么 f 称为全纯映照；如果 $f_*J=-J'f_*$，那么 f 称为反全纯映照。

因此，从上面计算可见，f 为全纯映照的充要条件是 $\partial\bar{f}\equiv 0$，f 为反全纯映照的充要条件是 $\partial f\equiv 0$。

进而，如果 M 和 N 是殆厄米流形，我们可取 M 的局部厄米标架场 $\{e_j, Je_j\}$，由此可得全纯标架场 $\varepsilon_j=\frac{\sqrt{2}}{2}(e_j-iJe_j)$ 以及反全纯标架场 $\bar{\varepsilon}_j=\frac{\sqrt{2}}{2}(e_j+iJe_j)$。这样，我们有

$$\begin{aligned}|\partial f|^2&=\langle\partial f(\varepsilon_j),\ \overline{\partial f}(\bar{\varepsilon}_j)\rangle\\&=\left\langle\frac{1}{2}(f_*e_j-iJ'f_*\varepsilon_j),\ \frac{1}{2}(f_*\bar{\varepsilon}_j+iJ'f_*\bar{\varepsilon}_j)\right\rangle\\&=\frac{1}{8}\langle f_*e_j-if_*Je_j-iJf_*e_j-J'f_*Je_j,\\&\qquad\qquad f_*e_j+if_*Je_j+iJ'f_*e_j-J'f_*Je_j\rangle\\&=\frac{1}{4}(\langle f_*e_j,\ f_*e_j\rangle+\langle f_*Je_j,\ f_*Je_j\rangle\\&\quad+2\langle f_*Je_j,\ J'f_*e_j\rangle),\end{aligned}$$

同样可得

$$\begin{aligned}|\partial\bar{f}|^2=\frac{1}{4}(&\langle f_*e_j,\ f_*e_j\rangle+\langle f_*Je_j,\ f_*Je_j\rangle\\&-2\langle f_*Je_j,\ J'f_*e_j\rangle).\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$e(f)=|\partial f|^2+|\partial\bar{f}|^2. \tag{4.1}$$

我们称 $|\partial f|^2=e'(f)$，$|\partial\bar{f}|^2=e''(f)$ 为部分能量密度。如果 M 是紧的，

$$E'(f)=\int_M e'(f)*1,\quad E''(f)=\int_M e''(f)*1,$$

从而有

$$E(f)=E'(f)+E''(f). \tag{4.2}$$

显然，当 $E''(f)=0$ 时，f 是全纯映照；当 $E'(f)=0$ 时，f 是反全纯映照。

§4.2 全纯映照的调和性

命题4.1 设 $f: M\to N$ 是 Kähler 流形间的全纯（反全纯）映照，那么 f 一定是调和映照：

证明 设 $B(f)$ 是 f 的第二基本型式，它是 $f^{-1}TN$ 值的 TM 上的对称二次型，首先

$$\begin{aligned}B_{X,JY}(f)&=\nabla_X f_* JY-f_*\nabla_X JY\\&=\pm\nabla_X J' f_* Y-f_* J\nabla_X Y\\&=\pm\nabla_{f_*X}J'f_*Y-f_*J\nabla_XY\\&=\pm(J'\nabla_{f_*X}f_*Y-J'f_*\nabla_XY)\\&=\pm J'B_{X,Y}(f),\end{aligned}$$

由 $B_{X,Y}(f)$ 的对称性，$B_{JX,Y}(f)=\pm J'B_{X,Y}(f)$。取 M 的局部厄米标架场 $\{e_j, Je_j\}$，那末，f 的张力场为

$$\tau(f)=B_{Je_j,Je_j}+B_{e_j,e_j}=-B_{e_j,e_j}+B_{e_j,e_j}=0,$$

所以，f 是调和映照。∎

事实上，我们可以进一部证明全纯映照在它所在的映照同伦类中取到能量的绝对极小值。

设 ω^M 和 ω^N 分别是 Kähler 流形 M 和 N 的 Kähler 形式。考虑

$$K(f)=E'(f)-E''(f)=\int_M\langle f_*Je_j, J'f_*e_j\rangle *1, \tag{4.3}$$

其中 $\{e_j, Je_j\}$ 是厄米标架场。由于

$$\omega(e_i, e_j)=\langle Je_i, e_j\rangle=0,$$

$$\omega(Je_i, Je_j)=-\langle e_i, Je_j\rangle=0,$$

$$\omega(e_i, Je_j)=\langle Je_i, Je_j\rangle=\delta_{ij},$$

$$
\begin{aligned}
\langle f^*\omega^N, \omega^M\rangle = & f^*\omega^N(e_i, e_j)\omega^M(e_i, e_j) \\
& + f^*\omega^N(e_i, Je_j)\omega^M(e_i, Je_j) \\
& + f^*\omega^N(Je_i, Je_j)\omega^M(Je_i, Je_j) \\
= & \omega^N(f_*e_i, f_*Je_j)\delta_{ij} \\
= & \langle J'f_*e_i, f_*Je_i\rangle.
\end{aligned}
$$

代入(4.3)式得到

$$
K(f) = \int_M \langle f^*\omega^N, \omega^M\rangle * 1, \tag{4.4}
$$

Lichnerowicz 证明了 $K(f)$ 是同伦不变量[75]. 事实上 N 是 Kähler 流形, ω^N 为闭形式. 设 $f_t: M\times[0, 1]\to N$ 是单数映照族, 那么 $\frac{d}{dt}f_t^*\omega^N$ 是一个正合形式, 即存在 θ_t, 使

$$
\frac{d}{dt}f_t^*\omega^N = d\theta_t.
$$

事实上对N上的闭 p 形式 ω. 设 $v = f_t^*\frac{\partial}{\partial t}$, 那么, 对 $X_1, \cdots, X_p\in TM$, 满足 $\nabla_{e_j}X_i|_x = 0$, 我们有

$$
\begin{aligned}
& d(f_t^* i(v)\omega)(X_1, \cdots, X_p) \\
= & (-1)^{k+1}\nabla_{X_k} f_t^* i(v)\omega(X_1, \cdots, \widehat{X_k}, \cdots, X_p) \\
= & (-1)^{k+1}\nabla_{f_t^* X_k}\omega(v, f_{t*}X_1, \cdots, \widehat{f_{t*}X_k}, \cdots, f_{t*}X_p) \\
= & (-1)^{k+1}(\nabla_{f_t^* X_k}\omega)(v, f_{t*}X_1, \cdots, \widehat{f_{t*}X_k}, \cdots, f_{t*}X_p) \\
& + (-1)^{k+1}w(\nabla_{f_t^* X_k}v, f_{t*}X_1, \cdots, \widehat{f_{t*}X_k}, \cdots, f_{t*}X_p) \\
& + \sum_{k,l}(-1)^{k+1}\omega(v, f_{t*}X_1, \cdots, \nabla_{f_t X_k} f_{t*}X_1, \cdots, \\
& \widehat{f_{t*}X_k}, \cdots, f_{t*}X_p) \\
= & -d\omega(v, f_{t*}X_1, \cdots, \widehat{f_{t*}X_k}, \cdots, f_{t*}X_p) \\
& + (\nabla_v\omega)(f_{t*}X_1, \cdots, f_{t*}X_p) \\
& + \omega(f_{t*}X_1, \cdots, \nabla_{f_{t*}X_k}v, \cdots, f_{t*}X_p) \\
& + \sum_{k<l}(-1)^{k+1}\omega(v, f_{t*}X_1, \cdots, [\widehat{f_{t*}X_k}, f_{t*}X_1], \\
& \cdots, \widehat{f_{t*}X_k}, \cdots, f_{t*}X_p) \\
= & (\nabla_v\omega)(f_{t*}X_1, \cdots, f_{t*}X_p)
\end{aligned}
$$

$$+\omega(f_{t*}X_1,\cdots,\nabla_v\widehat{f_{t*}X_k},\cdots,f_{t*}X_p)$$
$$=\nabla_v\omega(f_{t*}X_1,\cdots,f_{t*}X_p)=\nabla_v f_t^*\omega(X_1,\cdots,X_p)$$
$$=(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}f_t^*\omega)(X_1,\cdots,X_p),$$

这样，我们得到

$$\frac{d}{dt}f_t^*\omega^N=d\theta_t,\tag{4.5}$$

其中 $\theta_t=f_t^*i\left(f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}\right)\omega$。从而得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}K(f_t)&=\frac{d}{dt}\int_M\langle f_t^*\omega^N,\ \omega^M\rangle*1\\&=\int_M\left\langle\frac{d}{dt}f_t^*\omega^N,\ \omega^M\right\rangle*1\\&=\int_M\langle d\theta_t,\ \omega^M\rangle*1=\int_M\langle\theta_t,\ \delta\omega^M\rangle*1\\&=\int_M\langle\theta_t-*d*\omega^M\rangle*1\\&=-\int_M\langle\theta_t,\ *d(\omega^M)^{n-1}\rangle*1=0.\end{aligned}\tag{4.6}$$

这里当然假定M是紧致无边的。

定理 4.2[75]　设M和N都是Kähler流形，M是紧致无边的，那么全纯(反全纯)映照 $f: M\to N$ 是达到它同伦类中能量极小的调和映照。

证明　设 f 是全纯映照，那么 $E''(f)=0$。设 $f_t: M\times[0,1]\to N$，并且 $f_0=f$，那么，

$$E(f)=E'(f_0)+E''(f_0)=E'(f_0)-E''(f_0)$$
$$=K(f_0)=K(f_t)\leqslant E(f_t).$$

对反全纯情形也可同样证明。

推论 4.3　设M和N同上，$f_0: M\to N$ 是全纯映照，$f_1: M\to N$ 是反全纯映照，那么 f_0 和 f_1 不可能同伦，除非它们均为常值映照。

事实上，如果 f_0 通过 f_t 同伦于 f_1，那么

$$E(f_0)=E'(f_0)+E''(f_0)=E'(f_0)-E''(f_0)=K(f_0)$$

$$= K(f_1) = E'(f_1) - E''(f_1) = -E'(f_1) - E''(f_1)$$
$$= -E(f_1).$$

这就导至 $E(f_0) = E(f_1) = 0$。

又由于(4.6)式，

$$\frac{d}{dt} E'(f_t) = \frac{d}{dt} E''(f_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(f_t).$$

因此，能量泛函的临界点和部分能量的临界点是一样的。

上面的定理说明全纯映照的指标数为零，再来看它的零化数。

定理 4.4[66] 设 $f: M \to N$ 是 Kähler 流形间的全纯映照，那么 $s \in \Gamma(f^{-1}TN)$ 是 Jacobi 场的充要条件是 s 为全纯截面。

证明从略。有兴趣的读者请查阅上述文献。

§ 4.3 调和映照的全纯性

研究调和映照在什么条件下成为全纯映照是研究复流形间调和映照的重要课题。

首先，我们对复流形中的几种曲率加以说明。

1. 全纯截曲率：设 X 是 M 上某点的一个单位向量，则 JX 是与它正交的单位向量。由 X 和 JX 张成平面的截曲率称为全纯截曲率。记为

$$HR(X) = \langle R(X, JX)X, JX\rangle = -\langle R(\xi, \bar{\xi})\xi, \bar{\xi}\rangle,$$

其中 $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - iJX) \in TM^{1,0}$。反之，$X = \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi + \bar{\xi})$，记为 $X = \mathrm{real}\,\xi$。

2. 全纯双截曲率：设 X 和 Y 是 M 上某点的两个单位向量，那么全纯双截曲率定义为

$$BHR(X, Y) = \langle R(X, JX)Y, JY\rangle$$
$$= -\langle R(\xi, \bar{\xi})\eta, \bar{\eta}\rangle,$$

其中 $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - iJX)$，$\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y - iJY)$ 都是 M 上的局部

全纯向量场。从 Bianchi 恒等式以及复结构 J 的性质（等距，平行）得到

$$
\begin{aligned}
&BHR(X, Y) = -\langle R(X, Y)JY, JX\rangle \\
&-\langle R(X, JY)JX, Y\rangle = \langle R(X, Y)X, Y\rangle \\
&+\langle R(X, JY)X, JY\rangle,
\end{aligned}
$$

它为两个截面曲率之和。

在复几何的研究中有一个重要的 Frankel 猜想(1961)：任何紧致具正全纯双截曲率的 Kähler 流形一定和复射影空间 CP^n 全纯等价。这个猜想在 1979 年首先被日本数学家 Mori 用代数几何方法加以证明。后来，它又被丘成桐和萧荫堂用微分几何方法证明了。其中的关键就是下列稳定调和映照的全纯性定理。

定理 4.5[110]　设 N 是正全纯双截曲率的 Kähler 流形，那么，稳定调和映照 $f: S^2\to N$ 一定是全纯或反全纯映照。

证明　取 $v\in\Theta=\{\mathrm{grad}\, h;\ h=F|_{S^2},\ F$ 在 R^3 上为线性函数$\}$，那么，我们有

$$
\begin{cases}\nabla_X v=-hX\\ \nabla^2 v=-v.\end{cases}
$$

取 $J'f_*v\in\Gamma(f^{-1}TN)$，其中 J 和 J' 分别为 S^2 和 N 上的复结构。计算

$$
\begin{aligned}
-\nabla^2J'f_*v &= -\nabla_{f_*e_i}\nabla_{f_*e_i}J'f_*v \\
&= -J'((\nabla^2df)v+2(\nabla_{e_i}df)(\nabla_{e_i}v)+f_*(\nabla^2v)). \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

由于 f 是调和映照，$\Delta(df)=0$，并且从 Weitzenböck 公式(1.46)，

$$
\begin{aligned}
-(\nabla^2df)v &= R^N(f_*e_i, f_*v)f_*e_i-f_*\mathrm{Ric}(v) \\
&= R^N(f_*e_i, f_*v)f_*e_i-f_*v,
\end{aligned}
$$

$$
(\nabla_{e_i}df)(\nabla_{e_i}v) = -h(\nabla_{e_i}df)e_i=0,
$$

将它们代入(4.7)式，得到

$$
-\nabla^2J'f_*v=J'R^N(f_*e_i, f_*v)f_*e_i,
$$

代入第二变分公式(1.67)，并且取 $e_1=e$，$e_2=Je$，我们有

$$I(J'f_*v, J'f_*v)=\int_{S^2}\langle(J'R^N(f_*e, f_*v)f_*e$$
$$+J'R^N(f_*Je, f_*v)f_*Je-R^N(f_*e, J'f_*v)f_*e$$
$$-R^N(f_*Je, J'f_*v)f_*Je), J'f_*v\rangle*1.$$

因此，

$$\operatorname{trace} I=\int_{S^2}[2K(f_*e, f_*Je)-2K(f_*e, J'f_*Je)$$
$$-K(f_*e, J'f_*e)-K(f_*Je, J'f_*Je)]*1, \tag{4.8}$$

其中对 $X, Y\in TN$，记 $K(X, Y)=\langle R^N(X, Y)X, Y\rangle$.

另一方面，直接计算说明

$$\langle R(f_*Je-J'f_*e, J'f_*Je+f_*e)(f_*Je+J'f_*e),$$
$$(J'f_*Je-f_*e)\rangle=K(f_*Je, J'f_*Je)$$
$$-2\langle R^N(f_*Je, J'f_*Je)J'f_*e, f_*e\rangle$$
$$-4K(f_*e, f_*Je)+K(f_*e, J'f_*e), \tag{4.9}$$

又从 Bianchi 恒等式，知

$$\langle R^N(f_*Je, J'f_*Je)J'f_*e, f_*e\rangle$$
$$=-K(f_*e, f_*Je)-K(f_*e, J'f_*Je),$$

将它代入(4.9)式，得

$$\langle R^N(f_*Je-J'f_*e, J'f_*Je+f_*e)(f_*Je+J'f_*e),$$
$$(J'f_*Je-f_*e)\rangle=-2K(f_*e, f_*Je)$$
$$+2K(f_*e, J'f_*Je)+K(f_*Je, J'f_*Je)$$
$$+K(f_*e, J'f_*e). \tag{4.10}$$

从(4.8)式和(4.10)式得到稳定性条件为

$$\int_{S^2}\langle R^N(f_*Je-J'f_*e, J'f_*Je+f_*e)(f_*Je+J'f_*e),$$
$$(J'f_*Je-f_*e)\rangle*1\leqslant 0. \tag{4.11}$$

如果 f 既非全纯也非反全纯，那么

$$e'(f)=|\partial f|^2 \quad 和 \quad e''(f)=|\partial\bar{f}|^2$$

只有孤立零点，因而有限，设零点的集合为 U。所以，对 $S^2\backslash U$ 中的任何点，$f_*Je-J'f_*e$ 和 $f_*Je+J'f_*e$ 非零，而由它们张成的

全纯双截曲率为正．因而

$$\int_{S^2} \langle R^N(f_*Je - J'f_*e, J'f_*Je + f_*e)(f_*Je + J'f_*e),$$
$$(J'f_*Je - f_*e)\rangle *1 \geqslant \int_{S^2 \setminus U} |f_*Je - J'f_*e|^2 |f_*Je$$
$$+ J'f_*e|^2 BHR(X, Y) *1 > 0,$$

其中
$$X = (f_*Je - J'f_*e)/|f_*Je - J'f_*e|,$$
$$Y = (f_*Je + J'f_*e)/|f_*Je + J'f_*e|.$$

这和(4.11)式相矛盾． ∎

如果始流形是一般完备的 Riemann 面，情况更为复杂，但仍有一些结果．设 $E \to M$ 是 Kähler 流形 N 上的厄米向量丛，$\omega \in \mathscr{A}^{p,q}(E)$ 是 E 值的 (p, q) 形式．我们有微分算子

$$\partial: \mathscr{A}^{p,q}(E) \to \mathscr{A}^{p+1,q}(E), \ \partial^*: \mathscr{A}^{p,q}(E) \to \mathscr{A}^{p-1,q}(E),$$
$$\bar\partial: \mathscr{A}^{p,q} \to \mathscr{A}^{p,q+1}(E), \ \bar\partial^*: \mathscr{A}^{p,q} \to \mathscr{A}^{p,q-1}(E).$$

对 E 值 (p, q) 形可定义复 Laplace 算子 $\Delta^C(\bar\Delta^C)$：$\mathscr{A}^{p,q} \to \mathscr{A}^{p,q}$ 如下：

$$\Delta^C = \partial\partial^* + \partial^*\partial, \ \bar\Delta^C = \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial.$$

如果 $\omega \in \ker(\Delta^C)$，那么 ω 称为 ∂－调和形式；同样，有 $\bar\partial$－调和形式．不难说明，当 f 是调和映照时，∂f 是 ∂－调和形式，$\bar\partial f$ 是 $\bar\partial$－调和形式．还有下列重要的 Weitzenböck 公式

$$\Delta^C\omega = -\nabla_{\bar e_i}\nabla_{e_i}\omega + S(\omega),$$
$$\bar\Delta^C\omega = -\nabla_{e_i}\nabla_{\bar e_i}\omega + S'(\omega),$$

其中 $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}$，并且

$$S(\omega)(X_1, \cdots, X_p; Y_1, \cdots, Y_q)$$
$$= (-1)^k (R(\bar e_i, X_k)\omega)$$
$$\cdot(e_i, X_1, \cdots, \widehat{X}_k, \cdots, X_p; Y_1, \cdots, Y_q),$$
$$S'(\omega)(X_1, \cdots, X_p; Y_1, \cdots, Y_q)$$
$$= (-1)^k (R(e_i, Y_k)\omega)$$
$$\cdot(X_1, \cdots, X_p; \bar e_i, Y_1, \cdots, \widehat{Y}_k, \cdots, Y_q),$$

其中 $X_1, \cdots, X_p \in \Gamma(TM^{1,0})$，$Y_1, \cdots, Y_q \in \Gamma(TM^{0,1})$．据此，可以计算部分能量密度的 Laplacian．设 f 是 Kähler 流形 M 到

N中的调和映照，那么，

$$\frac{1}{2}\Delta e'=\sum_i|\nabla e_i\partial f|^2+\sum_i|\nabla_{\bar{e}_i}\partial f|^2$$
$$-2\langle R(f_*\bar{e}_i,\ f_*e_j)f'_*e_i,\ f''_*\bar{e}_j\rangle$$
$$+\langle R(f_*e_i,\ f_*\bar{e}_i)f''_*\bar{e}_j,\ f'_*e_j\rangle+\langle f'_*\mathrm{Ric}\cdot e_j,\ f''_*\bar{e}_j\rangle,$$

$$\frac{1}{2}\Delta e''=\sum_i|\nabla e_i\partial\bar{f}|^2+\sum_i|\nabla_{\bar{e}_i}\partial\bar{f}|^2$$
$$-2\langle R(f_*\bar{e}_i,\ f_*e_j)f''_*e_i,\ f'_*\bar{e}_j\rangle$$
$$+\langle R(f_*\bar{e}_i,\ f_*e_i)f''_*e_j,\ f'_*\bar{e}_j\rangle$$
$$-\langle f'_*\mathrm{Ric}\bar{e}_j,\ f''_*e_j\rangle,$$

其中 $\mathrm{Ric}e_j=R(\bar{e}_i,\ e_i)e_j$，$f'_*e_i$、$f''_*e_i$ 分别表示 f_*e_i 的(1, 0)分量以及(0, 1)分量。

如果M是 Riemann 面，它的高斯曲率为K，而N为具Fubini-Study 度量的复射影空间，它的全纯截曲率为1. 这时N的曲率张量有表达式

$$\langle R(X',\ X'')Y',\ Y''\rangle=-\frac{1}{2}(\langle X',\ X''\rangle\langle Y',\ Y''\rangle+\langle X',\ Y''\rangle\langle X'',\ Y'\rangle),$$

其中 X', Y' 为(1, 0)型向量，而 X'', Y'' 为(0, 1)型向量. 这样，我们有

$$\frac{1}{2}\Delta e'=|\nabla_e\partial f|^2+\frac{1}{2}e'(e''-2e'+2K)+\frac{1}{2}|\langle f'_*e,\ f''_*e\rangle|^2, \tag{4.12}$$

$$\frac{1}{2}\Delta e''=|\nabla_e\partial\bar{f}|^2+\frac{1}{2}e''(e'-2e''+2K)+\frac{1}{2}|\langle f'_*e,\ f''_*e\rangle|^2. \tag{4.13}$$

定理 4.6[127] 设M是完备的 Riemann 面，它的高斯曲率K有下界，CP^n 是具 Fubini-Study 度量的复射影空间，$f: M\to CP^n$ 为调和映照。如果

$$e''\leqslant K+\frac{1}{2}e'-\delta,$$

那么，f 是全纯映照；如果

$$e'\leqslant K+\frac{1}{2}e''-\delta,$$

那么，f 为反全纯映照，其中 δ 为任一正常数。

证明　对M上的 C^2 函数 u，设 $g(u)$ 是 u 的 C^2 函数，满足 $g'<0,\ g''\geqslant 0$。这样的函数是存在的，如取

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{u+C}},$$

其中 C 是正常数。

$$\Delta g(u)=g''|\mathrm{grad}\,u|^2+g'\Delta u=\frac{g''}{g'^2}|\mathrm{grad}\,g(u)|^2+g'\Delta u. \tag{4.14}$$

现在对 $\dfrac{1}{\sqrt{e''+C}}$ 应用广义极值原理(见定理 3.6)，即对任何 $\varepsilon>0$，在N中存在一点 $x\in N$，使在这点有

$$\left|\mathrm{grad}\,\frac{1}{\sqrt{e''+1}}\right|<\varepsilon,\ \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{e''+C}}\right)>-\varepsilon,$$

以及

$$\frac{1}{\sqrt{e''+C}}<\inf\frac{1}{\sqrt{e''+C}}+\varepsilon,$$

将它们代入(4.14)式，得

$$\begin{aligned}-\varepsilon<\Delta\left(\frac{1}{\sqrt{e''+C}}\right)&=12\sqrt{e''+C}\left|\mathrm{grad}\,\frac{1}{\sqrt{e''+C}}\right|^2\\&-\frac{1}{2(e''+C)^{\frac{3}{2}}}\Delta e''<12\sqrt{e''+C}\,\varepsilon^2-\frac{1}{2(e''+C)^{\frac{3}{2}}}\Delta e''.\end{aligned} \tag{4.15}$$

从(4.13)式我们有

$$\frac{1}{2}\Delta e''\geqslant\frac{1}{2}e''(e'-2e''+2K),$$

将它代入(4.15)式，考虑到定理的条件，整理后得到

$$\frac{e''\delta}{(e''+C)^2}<12\varepsilon^2+\varepsilon\left(\inf\frac{1}{\sqrt{e''+C}}+\varepsilon\right). \tag{4.16}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$\frac{1}{\sqrt{e''+C}}\to\inf\frac{1}{\sqrt{e''+C}},$$

从而 $e''\to\sup e''$。这样，(4.16)式导致 $\sup e''\leqslant 0$，而 $e''<0$ 是不可能的，所以 $e''\equiv 0$，f 是全纯映照。类似地，利用(4.12)式可知当 $e'\leqslant K+\frac{1}{2}-\delta$ 时，f 为反全纯映照。

应用截断函数作积分估计可以证明下面的定理。

定理 4.7[127] 设M是完备的 Riemann 面，它的高斯曲率为 K，CP^n 是全纯截曲率为 1 的复射影空间，$f: M\to CP^n$ 为调和映照。如果

1) $e''<K+\frac{1}{2}e'\left(\text{或 } e'<K+\frac{1}{2}e''\right)$，

2) 存在一点 $p_0\in M$，使

$$\int_{B_R}e''*1=o(R^2)\ \left(\text{或}\int_{B_R}e'*1=o(R^2)\right),$$

其中 B_R 表示以 p_0 为中心 R 为半径的测地球，那么 f 是全纯映照(或反全纯映照)。

证明 首先由 Schwartz 不等式

$$\nabla_{\bar{e}}e''\nabla_{e}e''\leqslant e''|\nabla_{e}\partial\bar{f}|^2, \tag{4.17}$$

再由(4.13)式，对任何 $C>0$ 可得

$$\frac{1}{2}\Delta\sqrt{e''+C}\geqslant 0。$$

设 η 是M上具紧致支撑的函数，那么由 Green 定理，得

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_M\eta^2\sqrt{e''+C}\,\Delta\sqrt{e''+C}*1\\&=-2\int_M\eta\sqrt{e''+C}\,\nabla_{e_i}\eta\nabla_{e_i}\sqrt{e''+C}*1\\&\quad-\int_M\eta^2|\nabla\sqrt{e''+C}|^2*1。\end{aligned}\tag{4.18}$$

对 $p_0\in M$，设 B_R 和 B_{2R} 分别为以 p_0 为中心 R 和 $2R$ 为半径的测地球。取 η 为

$$\eta(p)=\begin{cases}1, & 在\ B_R\ 中,\\ 0, & 在\ B_{2R}\ 外,\end{cases}$$

且 $|\nabla\eta|\leqslant\frac{d}{R}$, d 为常数。这样,(4.18)式化为

$$0\leqslant 2\sqrt{\int_{B_{2R}\setminus B_R}\eta^2|\nabla\sqrt{e''+C}|^2*1}\sqrt{\int_{B_{2R}\setminus B_R}(e''+C)|\nabla\eta|^2*1}$$

$$-\int_{B_{2R}\setminus B_R}\eta^2|\nabla\sqrt{e''+C}|^2*1-\int_{B_R}|\nabla\sqrt{e''+C}|^2*1,$$

所以

$$\int_{B_R}|\nabla\sqrt{e''+C}|^2*1\leqslant\int_{B_{2R}\setminus B_R}(e''+C)|\nabla\eta|^2*1$$

$$\leqslant\frac{d^2}{R^2}\int_{B_{2R}}(e''+C)*1.$$

类似于定理1.13的证明可得 $e''=\mathrm{const}$,再代入(4.13)式并考虑到定理的条件就推出 $e''\equiv 0$,即 f 为全纯映照;类似可证 f 在另一条件下为反全纯映照。

调和映照的全纯性的另一重要应用是证明强刚性定理。在1960年Calabi-Vesentini[11] 证明了有界对称域的紧致商不允许非平凡无穷小全纯变形。在1970年Mostow[80] 发现了强刚性,他证明了具有非正截曲率的紧致的局部对称Riemann流形的基本群往往可确定流形直到等距。丘成桐猜想这个强刚性现象对复维数大于等于2的具负截曲率的紧致Kähler流形也成立。后来,萧荫堂在强负曲率的假定下证明了强刚性。其中的关键是下列调和映照的全纯性。

为此,我们首先介绍强负曲率的定义。

利用曲率张量,我们来定义一个厄米形式

$$\tilde{Q}: (TM^{1,0}\otimes TM^{0,1})\otimes(TM^{1,0}\otimes TM^{0,1})\to\mathbf{C}$$

如下:对任何 $A, B, C, D\in TM^{1,0}$,

$$\tilde{Q}(A\otimes\bar{B}, C\otimes\bar{D})=-\langle R^M(A,\bar{C})D,\bar{B}\rangle.$$

前面，我们定义了全纯双截曲率，它也可用这里的厄米形式 $\tilde{Q}$ 来表示。对任何 A, $B\in TM^{1,0}$，由 real$A$ 和 real$B$ 张成的全纯双截曲率为

$$\tilde{Q}(A\otimes\bar{B})=\tilde{Q}(A\otimes\bar{B},\ A\otimes\bar{B})$$
$$=-\langle R^M(A,\ \bar{A})B,\ \bar{B}\rangle.$$

如果，对 $A\otimes\bar{B}-C\otimes\bar{D}\neq 0$，

$$\tilde{Q}(A\otimes\bar{B}-C\otimes\bar{D})=\langle R^M(\bar{A},\ B)A,\ \bar{B}\rangle$$
$$+\langle R^M(\bar{D},\ C)D,\ \bar{C}\rangle+\langle R^M(A,\ \bar{B})D,\ \bar{C}\rangle$$
$$+\langle R^M(B,\ \bar{A})C,\ \bar{D}\rangle<0(\leqslant 0). \tag{4.19}$$

那么，流形称为强负(半负)曲率的。它是比负截面曲率的条件更强。事实上，对 X, $Y\in TM$，设 $\xi=X+iJX$, $\eta=Y+iJY$ 是分别由 X, Y 所生成的(0, 1)-向量，那么

$$\langle R^M(X,\ Y)X,\ Y\rangle=\frac{1}{16}(2\langle R^M(\bar{\xi},\ \eta)\xi,\ \bar{\eta}\rangle$$
$$+\langle R^M(\bar{\xi},\ \eta)\bar{\xi},\ \eta\rangle+\langle R^M(\xi,\ \bar{\eta})\xi,\ \bar{\eta}\rangle). \tag{4.20}$$

如果在(4.19)式中令

$$A=\xi=D,\quad B=\eta=C,$$

那么，考虑到(4.20)式，我们可以看到强负曲率蕴函着负截曲率，强半负曲率蕴函着非正截曲率.

设 e_i, $\bar{e}_j$ 同上，ω^i 是 e_i 的对偶标架场，对 Kähler 流形间的映照 f: $M\to N$，考虑(1, 1)-形式

$$\omega=\langle f''_* e_i,\ f'_*\bar{e}_j\rangle\bar{\omega}^j\wedge\omega^i. \tag{4.21}$$

我们有

$$\bar{\partial}\omega=\bar{\omega}^k\wedge\nabla_{\bar{e}_k}(\langle f''_* e_i,\ f'_*\bar{e}_j\rangle\bar{\omega}^j\wedge\omega^i),$$

以及

$$\partial\bar{\partial}\omega=\omega^l\wedge\nabla_{e_l}(\bar{\omega}_k\wedge\nabla_{\bar{e}_k}(\langle f''_* e_i,\ f'_*\bar{e}_j\rangle\bar{\omega}^j\wedge\omega^i)).$$

如果 e_1 是关于某点 p 的法标架场，那么

$$\partial\bar{\partial}\omega=\omega^l\wedge\bar{\omega}^k\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}(\langle f''_* e_i,\ f'_*\bar{e}_j\rangle\bar{\omega}^j\wedge\omega^i)$$
$$=\nabla e_1\nabla_{\bar{e}_k}\langle f''_* e_i,\ f'_*\bar{e}_j\rangle\omega^l\wedge\bar{\omega}^k\wedge\bar{\omega}^j\wedge\omega^i$$
$$+\langle f''_* e_i,\ f'_*\bar{e}_j\rangle\omega^l\wedge\bar{\omega}^k\wedge\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}\bar{\omega}^j\wedge\omega^i$$

$$
\begin{aligned}
&+\langle f''_* e_i,\ f'_*\bar{e}_j\rangle\omega^l\wedge\bar{\omega}^k\wedge\bar{\omega}^j\wedge\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}\omega^i\\
=&\,(\langle\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}f''_* e_i,\ f'_*\bar{e}_j\rangle+\langle\nabla_{\bar{e}_k}f''_* e_i,\ \nabla_{e_l}f'_*\bar{e}_j\rangle\\
&+\langle\nabla_{e_l}f''_* e_i,\ \nabla_{\bar{e}_k}f'_*\bar{e}_j\rangle\\
&+\langle f''_* e_i,\ \nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}f'_*\bar{e}_j\rangle)\omega^l\wedge\bar{\omega}^k\wedge\bar{\omega}^j\wedge\omega^i\\
&+\langle f''_* e_i,\ f'_*\bar{e}_s\rangle\omega^l\wedge\bar{\omega}^k\wedge\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}\bar{\omega}^s\wedge\omega^i\\
&+\langle f''_* e_s,\ f'_*\bar{e}_j\rangle\omega^l\wedge\bar{\omega}^k\wedge\bar{\omega}^j\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}\omega^s.
\end{aligned}\tag{4.22}
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}\bar{\omega}^s(\bar{e}_j)&=\nabla_{e_l}((\nabla_{\bar{e}_k}\bar{\omega}^s)(\bar{e}_j))-(\nabla_{\bar{e}_k}\bar{\omega}^s)(\nabla_{e_l}\bar{e}_j)\\
&=-\bar{\omega}^s(\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}\bar{e}_j),
\end{aligned}
$$

即

$$
\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}\bar{\omega}^s=-\bar{\omega}^s(\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}\bar{e}_j)\bar{\omega}^j.\tag{4.23}
$$

类似地,

$$
\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}\omega^s=-\bar{\omega}^s(\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}e_i)\omega^i.\tag{4.24}
$$

将(4.23)式和(4.24)式代入(4.22)式得到

$$
\begin{aligned}
\partial\bar{\partial}\omega=&\,(\langle\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}f''_* e_i,\ f'_*\bar{e}_j\rangle+\langle\nabla_{\bar{e}_k}f''_* e_i,\ \nabla_{e_l}f'_*\bar{e}_j\rangle\\
&+\langle\nabla_{e_l}f''_* e_i,\ \nabla_{\bar{e}_k}f'_*\bar{e}_j\rangle+\langle f''_* e_i,\ \nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}f'_*\bar{e}_j\rangle\\
&-\langle f''_* e_i,\ f'_*\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}\bar{e}_j\rangle\\
&-\langle f''_*(\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}e_i),\ f'_*\bar{e}_j\rangle)\omega^l\wedge\bar{\omega}^k\wedge\bar{\omega}^j\wedge\omega^i.
\end{aligned}\tag{4.25}
$$

考虑到

$$
\nabla_{\bar{e}_k}f'_*\bar{e}_j=(\nabla_{\bar{e}_k}\bar{\partial}f)\bar{e}_j,
$$

它关于 k, j 是对称的, 而 $\omega^l\wedge\bar{\omega}^k\wedge\bar{\omega}^j\wedge\omega^i$ 关于 k, j 是反称的. 从而(4.25)式右边的第三项为零, 并且

$$
\begin{aligned}
&\langle f''_* e_i,\ \nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}f'_*\bar{e}_j\rangle-\langle f''_* e_i,\ f'_*\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}\bar{e}_j\rangle\\
=&\,\langle f''_* e_i,\ \nabla_{e_l}(\nabla_{\bar{e}_k}\bar{\partial}f)\bar{e}_j+\nabla_{e_l}\bar{\partial}f(\nabla_{\bar{e}_k}\bar{e}_j)-\bar{\partial}f(\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}\bar{e}_j)\rangle\\
=&\,\langle f''_* e_i,\ \nabla_{e_l}(\nabla_{\bar{e}_k}\bar{\partial}f)\bar{e}_j\rangle,
\end{aligned}
$$

它关于 k, j 也是对称的, 所以, (4.25)式右边的第四、第五项也为零. 又考虑到

$$
\begin{aligned}
&\langle\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}f''_* e_i,\ f'_*\bar{e}_j\rangle-\langle f''_*(\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}e_i),\ f'_*\bar{e}_j\rangle\\
=&\,\langle\nabla_{e_l}(\nabla_{\bar{e}_k}\partial\bar{f})e_i+\nabla_{e_l}\partial\bar{f}(\nabla_{\bar{e}_k}e_i)-\partial\bar{f}(\nabla_{e_l}\nabla_{\bar{e}_k}e_i),\ f'_*\bar{e}_j\rangle\\
=&\,\langle(\mathscr{R}(e_l,\ \bar{e}_k)\partial\bar{f})e_i+(\nabla_{\bar{e}_k}\nabla_{e_l}\partial f)e_i,\ f'_*\bar{e}_j\rangle
\end{aligned}
$$

$$= \langle R^N(f_*\varepsilon_l,\ f_*\bar{\varepsilon}_k)f''_*\varepsilon_i - f''_*R^M(\varepsilon_l,\ \bar{\varepsilon}_k)\varepsilon_i + \nabla_{\bar{\varepsilon}_k}(\nabla_{\varepsilon_l}\partial f)\varepsilon_i,\ f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle,$$

(4.25)式化为

$$\begin{aligned}\partial\bar{\partial}\omega = (&\langle R^N(f_*\varepsilon_l,\ f_*\bar{\varepsilon}_k)f''_*\varepsilon_i,\ f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle \\ &- \langle f''_*R^M(\varepsilon_l,\ \bar{\varepsilon}_k)\varepsilon_i,\ f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle \\ &+ \langle \nabla_{\bar{\varepsilon}_k}(\nabla_{\varepsilon_l}\partial f)\varepsilon_i,\ f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle \\ &+ \langle \nabla_{\bar{\varepsilon}_k}f''_*\varepsilon_i,\ \nabla_{\varepsilon_l}f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle)\omega^l\wedge\bar{\omega}^k\wedge\bar{\omega}^j\wedge\omega^i. \end{aligned} \tag{4.26}$$

对 Kähler 流形 M，$R^M(\varepsilon_i,\ \varepsilon_l)\bar{\varepsilon}_k = 0$，因而 $R^M(\varepsilon_l,\ \bar{\varepsilon}_k)\varepsilon_i$ 关于 l, i 是对称的，(4.26)式右端的第三项关于 l, i 也对称，它们在(4.26)式中消失。同样道理(4.26)式中的第一项变成

$$\langle R^N(f'_*\varepsilon_l,\ f''_*\bar{\varepsilon}_k)f''_*\varepsilon_i,\ f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle.$$

最后，我们得到 Bochner 型公式如下：

$$\begin{aligned}\partial\bar{\partial}\omega = (&\langle \nabla_{\bar{\varepsilon}_k}f''_*\varepsilon_i,\ \nabla_{\varepsilon_l}f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle \\ &+ \langle R^N(f'_*\varepsilon_l f''_*\bar{\varepsilon}_k)f''_*\varepsilon_i,\ f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle)\omega^l\wedge\bar{\omega}^k\wedge\bar{\omega}^j\wedge\omega^i. \end{aligned} \tag{4.27}$$

值得指出的是(4.27)式与映照的调和性无关。

命题 4.8 设 M, N 是复维数分别为 m, n 的紧致 Kähler 流形，$f: M\to N$ 是调和映照。如果N的曲率是强半负的，那么，对 $1\leqslant i,\ j\leqslant m$,

$$\begin{aligned} &-\langle R^N(f''_*\varepsilon_i,\ f'_*\varepsilon_j)f''_*\bar{\varepsilon}_j,\ f'_*\bar{\varepsilon}_i\rangle \\ &+\langle R^N(f''_*\varepsilon_i,\ f'_*\varepsilon_j)f''_*\bar{\varepsilon}_i,\ f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle \\ &-\langle R^N(f''_*\varepsilon_j,\ f'_*\varepsilon_i)f''_*\bar{\varepsilon}_i,\ f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle \\ &+\langle R^N(f''_*\varepsilon_j,\ f'_*\varepsilon_i)f''_*\bar{\varepsilon}_j,\ f'_*\bar{\varepsilon}_i\rangle = 0. \end{aligned}$$

证明 设 $\Omega = i\sum_j\omega^j\wedge\bar{\omega}^j$ 是M的 Kähler 形式，那么

$$d(\bar{\partial}\omega\wedge\Omega^{n-2}) = d\bar{\partial}\omega\wedge\Omega^{n-2} = \partial\bar{\partial}\omega\wedge\Omega^{n-2}. \tag{4.28}$$

另一方面，由调和性条件，

$$\begin{aligned} &\langle \nabla_{\bar{\varepsilon}_k}f''_*\varepsilon_i,\ \nabla_{\varepsilon_l}f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle\omega^l\wedge\bar{\omega}^k\wedge\bar{\omega}^j\wedge\omega^i\wedge\Omega^{n-2} \\ &= \langle \nabla_{\bar{\varepsilon}_k}f''_*\varepsilon_i,\ \nabla_{\varepsilon_k}f'_*\bar{\varepsilon}_i\rangle\omega^k\wedge\bar{\omega}^k\wedge\bar{\omega}^i\wedge\omega^i\wedge\Omega^{n-2} \\ &\quad + \langle \nabla_{\bar{\varepsilon}_i}f''_*\varepsilon_i,\ \nabla_{\varepsilon_j}f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle\omega^j\wedge\bar{\omega}^i\wedge\bar{\omega}^j\wedge\omega^i\wedge\Omega^{n-2} \\ &= i^{n-2}(n-2)!\langle \nabla_{\bar{\varepsilon}_k}f''_*\varepsilon_i,\ \nabla_{\varepsilon_k}f''_*\bar{\varepsilon}_i\rangle *1. \end{aligned} \tag{4.29}$$

并且，

$$\langle R^N(f'_*\varepsilon_i, f''_*\bar{\varepsilon}_k)f''_*\varepsilon_s, f'_*\bar{\varepsilon}_t\rangle\omega^i\wedge\bar{\omega}^k\wedge\bar{\omega}^s\wedge\omega^t\wedge\Omega^{n-2}$$

$$=i^{n-2}(n-2)!(\langle R^N(f'_*\varepsilon_i, f''_*\bar{\varepsilon}_i)f''_*\varepsilon_j, f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle\omega^i\wedge\bar{\omega}^i\wedge\bar{\omega}^j\wedge\omega^j$$
$$+\langle R^N(f'_*\varepsilon_i, f''_*\bar{\varepsilon}_j)f''_*\varepsilon_i, f'_*\bar{\varepsilon}_i\rangle\omega^i\wedge\bar{\omega}^j\wedge\bar{\omega}^i\wedge\omega^j$$
$$+\langle R^N(f'_*\varepsilon_j, f''_*\bar{\varepsilon}_j)f''_*\varepsilon_i, f'_*\bar{\varepsilon}_i\rangle\omega^j\wedge\bar{\omega}^j\wedge\bar{\omega}^j\wedge\omega^i$$
$$+\langle R^N(f'_*\varepsilon_j, f''_*\bar{\varepsilon}_i)f''_*\varepsilon_i, f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle\omega^j\wedge\bar{\omega}^i\wedge\bar{\omega}^j\wedge\omega^i)$$
$$\sum_{i\neq j}\omega^1\wedge\bar{\omega}^1\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}^i\wedge\hat{\bar{\omega}}^i\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}^j\wedge\hat{\bar{\omega}}^j\wedge\cdots\wedge\omega^n\wedge\bar{\omega}^n$$

$$=i^{n-2}(n-2)!(-R^N(f'_*\varepsilon_i, f''_*\bar{\varepsilon}_i)f''_*\varepsilon_j, f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle$$
$$+\langle R^N(f'_*\varepsilon_i, f''_*\bar{\varepsilon}_j)f''_*\varepsilon_j, f'_*\bar{\varepsilon}_i\rangle$$
$$-\langle R^N(f'_*\varepsilon_j, f''_*\bar{\varepsilon}_j)f''_*\varepsilon_i, f'_*\bar{\varepsilon}_i\rangle$$
$$+\langle R^N(f'_*\varepsilon_j, f''_*\bar{\varepsilon}_i)f''_*\varepsilon_i, f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle)*1$$

$$=i^{n-2}(n-2)!(\langle R^N(f''_*\varepsilon_j, f'_*\varepsilon_i)f''_*\bar{\varepsilon}_i, f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle$$
$$-\langle R^N(f''_*\varepsilon_j, f'_*\varepsilon_i)f_*\bar{\varepsilon}_j, f'_*\bar{\varepsilon}_i\rangle$$
$$+\langle R^N(f''_*\varepsilon_i, f'_*\varepsilon_j)f''_*\bar{\varepsilon}_j, f'_*\bar{\varepsilon}_i\rangle$$
$$-\langle R^N(f''_*\varepsilon_i, f'_*\varepsilon_j)f''_*\bar{\varepsilon}_i, f'_*\bar{\varepsilon}_j\rangle)*1$$

$$=-i^{n-2}(n-2)!(\langle R^N(f''_*\varepsilon_j, f'_*\varepsilon_i)f'_*\bar{\varepsilon}_j, f''_*\bar{\varepsilon}_i\rangle$$
$$+\langle R^N(f''_*\varepsilon_j, f'_*\varepsilon_i)f''_*\bar{\varepsilon}_j, f'_*\bar{\varepsilon}_i\rangle$$
$$+\langle R^N(f'_*\varepsilon_j, f''_*\varepsilon_i)f''_*\bar{\varepsilon}_j, f'_*\bar{\varepsilon}_i\rangle$$
$$+\langle R^N(f'_*\varepsilon_j, f''_*\varepsilon_i)f'_*\bar{\varepsilon}_j, f_*\bar{\varepsilon}_i\rangle). \tag{4.30}$$

从(4.27)式、(4.28)式、(4.29)式、(4.30)式、Stokes 公式以及目标流形的强负曲率的假定，立即得到命题的证明。

引理 4.9　设V是复维数为n的复向量空间，W是V的实向量子空间，它的实维数小于等于$2n-2k$，设E是V的所有复基底的集合，而F是E中基$(e_1, \cdots, e_n)$的子集，它对所有$1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$，满足

$$\left(\sum_{v=1}^{k}\mathbb{C}e_{i_v}\right)\cap W=\phi,$$

那么F是E的稠密开子集。

引理 4.10　设f：$M\to N$是 Kähler 流形间的调和映照。设U是M的非空开子集。如果，f在U中是全纯(反全纯)映照，那

么，f 在整个 M 中是全纯（反全纯）映照。

这两个引理的证明从略。请读者参阅文献[109]。

定理 4.11[109] 设 M，N 是紧致的 Kähler 流形，并且 N 的曲率张量是强负的。设 $f: M\to N$ 是调和映照，它在 M 的某些点的实秩数至少是 4，那么，f 或者全纯映照或者是反全纯映照。

证明 首先，存在非空连通开集 $U\subset M$，使 f 在 U 中任一点上的秩至少为 4。那么，根据引理 4.10，我们只要证明在 U 中，

$$\text{或者 } \partial f\equiv 0,\ \text{或者 } \bar\partial f\equiv 0. \tag{4.31}$$

为此，只要说明，对 U 中每一点 $q\in U$，

$$\text{或者 } \partial f\equiv 0,\ \text{或者 } \bar\partial f\equiv 0. \tag{4.32}$$

由于 df 在 U 中处处非零，(4.32) 式意味着两个互不相交的闭子集 $U\cap\{\partial f=0\}$，$U\cap\{\bar\partial f=0\}$ 的并是连通集 U。因此，(4.32)式蕴函着(4.31)式。

设 $p\in U$，$q=f(p)$，根据目标流形强负曲率的假定以及命题 4.8，我们有

$$f'^{\alpha}_{*}\bar\varepsilon_j f''^{\beta}_{*}\bar\varepsilon_i-f'^{\alpha}_{*}\bar\varepsilon_i f''^{\beta}_{*}\bar\varepsilon_j=0, \tag{4.33}$$

其中 $\{\varepsilon_i\}$ 是 T_pM 的复基，并对 $1\leqslant i_0<j_0\leqslant m$ 满足

$$\{\varepsilon_{i_0},\ \varepsilon_{j_0}\}\cap\mathrm{Ker}(df)_p=\phi,$$

并取 T_qN 的复基 $\{\eta_\alpha\}$，使对 $1\leqslant\alpha_0<\beta_0\leqslant n$，满足

$$\{\eta_1,\ \cdots,\ \hat\eta_{\alpha_0},\ \cdots,\ \hat\eta_{\beta_0},\ \cdots,\ \eta_n\}\cap\mathrm{Image}(df)_p=\phi.$$

根据引理 4.9，这样的基 ε_i，η_α 是可以取到的。因而我们有

$$\eta_{\alpha_0},\ \eta_{\beta_0}\in\{f_*\varepsilon_{i_0},\ f_*\varepsilon_{j_0}\}$$

假定 $\partial f\neq 0$，即 $f''_{*}\bar\varepsilon_i\neq 0$。设在 $f''^{1}_{*}\bar\varepsilon_i$，$\cdots$，$f''^{n}_{*}\bar\varepsilon_i$ 中复线性独立的(0, 1)向量的个数为 n'。下面分两种情形讨论：

(1) $n'=2$

不失一般性，我们假定 $f''^{1}_{*}\bar\varepsilon_i$ 和 $f''^{2}_{*}\bar\varepsilon_i$ 是线性独立的。在(4.33)式中取 $\beta=1, 2$

$$\frac{f'^{\alpha}_{*}\bar\varepsilon_j}{f''^{\beta}_{*}\bar\varepsilon_j}=\frac{f'^{\alpha}_{*}\bar\varepsilon_i}{f''^{\beta}_{*}\bar\varepsilon_i}=C_{\alpha\beta},$$

$$f'^{\alpha}_{*}\bar\varepsilon_j=C_{\alpha1}f''^{1}_{*}\bar\varepsilon_j=C_{\alpha2}f''^{2}_{*}\bar\varepsilon_j.$$

如果 $f'^{\alpha}_{*}\bar{\varepsilon}_j \neq 0$ (即 $\bar{\partial} f \neq 0$)，那么，$C_{\alpha 1} \neq 0$，$C_{\alpha 2} \neq 0$，从而上式和 $f''^{1}_{*}\bar{\varepsilon}_j$，$f''^{2}_{*}\bar{\varepsilon}_j$ 的线性独立相矛盾。

(2) $n'=1$

对 $1<\alpha\leqslant n$ 存在复数 r^{α}，使

$$f''^{\alpha}_{*}\bar{\varepsilon}_1 = r^{\alpha} f''^{1}_{*}\bar{\varepsilon}_1,\ \partial \overline{f^{\alpha}} = r^{\alpha} \partial \overline{f^{1}}. \tag{4.34}$$

在(4.33)式中取 $\beta=1$，

$$f'^{\alpha}_{*}\bar{\varepsilon}_j = C^{\alpha} f'^{1}_{*}\bar{\varepsilon}_j,\ \bar{\partial} f^{\alpha} = C^{\alpha} \bar{\partial} f^{1}. \tag{4.35}$$

从(4.34)式和(4.35)式可知

$$df^{\alpha_0} \wedge \overline{df^{\alpha_0}} \wedge df^{\beta_0} \wedge \overline{df^{\beta_0}}$$

是 ∂f^1 和 $\overline{\partial f^1}$ 外积的线性组合而为零。这是和

$$df_*(\varepsilon_{i_0}, \varepsilon_{j_0}) \to (\eta_{\alpha_0}, \eta_{\beta_0})$$

的非奇异性相矛盾的。

这就完成了定理的证明。 ∎

利用定理 4.11，萧荫堂[109]进一步证明了强刚性定理：设M，N 同上，并且M的复维数大于等于 2 。那么，M，N 间的任何调和同伦等价一定是双全纯微分同胚。

第 5 章

存在性、不存在性和正则性

调和映照的基本存在定理是由 Eells 和 Sampson 用热流法得到的[29]。后来又被 Uhlenbeck 用摄动法所证明[116]。本章我们用变分直接法讨论调和映照的存在性。它的关键是正则性，对能量极小调和映照的部分正则性是由 Schoen 和 Uhlenbeck[100] 以及 Giaquinta 和 Giusti 所得到的[37]。后来 Hardt 和 Lin 又证明了 p-调和映照的部分正则性[51]。

§5.1 变分直接法

设M和N均是紧致 Riemann 流形。由 Nash 嵌入定理，将N等距地嵌入到高维欧氏空间 $\mathbb{R}^K$ 中。设 $\mathscr{L}_1^2(M, \mathbb{R}^K)$ 是M到 $\mathbb{R}^K$ 的映照的 Sobolev 空间，对任何 $f\in\mathscr{L}_1^2(M, \mathbb{R}^K)$，它的弱导数平方可积，并具有希尔伯特范数

$$\|f\|=\left[\int_M(|f|^2+|df|^2)*1\right]^{1/2}. \tag{5.1}$$

考虑M到N映照所定义的空间

$\mathscr{L}_1^2(M, N)=\{f\in\mathscr{L}_1^2(M, \mathbb{R}^K);$ 对几乎所有 $x\in M$, $f(x)\in N\}$。这就是变分直接法的工作空间。显然，对任何 $f\in\mathscr{L}_1^2(M, N)$可定义能量，并当 f 光滑时与第 2 章的定义相一致。

命题 5.1 能量泛函E关于 $\mathscr{L}_1^2(M, \mathbb{R}^K)$ 的弱收敛是下半连续的。

证明 设 $\{f_i\}$ 在 $\mathscr{L}_1^2(M, \mathbb{R}^K)$ 中弱收敛于 f。由共鸣定理

$\{f_i\}$是有界的，而$\mathscr{L}_1^2(M, \mathbf{R}^K)$可以紧嵌入到$\mathscr{L}^2$中，由希尔伯特空间理论，$\{f_i\}$在$\mathscr{L}^2$中强收敛于$f$。因此，$\{df_k\}$在$\mathscr{L}^2$中弱收敛于$df$。并且，我们有

$$E(f_k)-E(f)=\frac{1}{2}\int_M |df_k-df|^2*1 +\int_M \langle(df_k-df), df\rangle*1 \geqslant\int_M \langle(df_k-df), df\rangle*1,$$

所以$\varliminf_{k\to\infty}(E(f_k)-E(f))\geqslant 0$。

命题5.2　$\mathscr{L}_1^2(M, N)$是弱闭的。

证明　设$f_i\in\mathscr{L}_1^2(M, N)$，并且$\{f_i\}$弱收敛于$f$，则$\{f_i\}$在$\mathscr{L}^2$意义下强收敛于$f$；又根据实变函数论中的Riesz定理可再取子列，还记作$\{f_i\}$，它在M上几乎处处收敛于f。由于$f_i\in\mathscr{L}_1^2(M, N)$，$N$是$\mathbf{R}^N$中的闭集，所以$f$对几乎所有$M$上的点都取值于$N$，从而$f\in\mathscr{L}_1^2(M, N)$。 ▮

命题5.3　设$S\subset\mathscr{L}_1^2(M, N)$，在$S$上能量泛函有界，那么$S$是弱列紧的。

证明　从庞加莱不等式知S是$\mathscr{L}_1^2(M, N)\subset\mathscr{L}_1^2(M, \mathbf{R}^K)$中的有界集，根据泛函分析中的Eberlein-Шмулян定理，必有序列$\{f_i\}\subset S$，并且f_i弱收敛于f。由命题5.2知，$f\in\mathscr{L}_1^2(M, N)$。 ▮

从上述命题，我们可用变分直接法得到能量极小映照。设$\mathscr{F}\subset\mathscr{L}_1^2(M, N)$是$M$到$N$适当的映照类，它通常是由拓扑条件或映照的边界条件所定义的$\mathscr{L}_1^2(M, N)$的弱闭子集。取$\mathscr{F}$中的极小化序列$\{f_i\}$。从命题5.3知，存在子列，仍记为$\{f_i\}$，弱收敛于f。由命题5.1，

$$E(f)\leqslant\varliminf_{i\to\infty}E(f_i)=\inf_{f'\in\mathscr{F}}E(f').$$

所以，我们求得了$\mathscr{F}$中的能量极小映照$f\in\mathscr{F}\subset\mathscr{L}_1^2(M, N)$。

这里得到的能量极小映照f一般是不连续的。为此，我们来

引进弱调和映照的概念。设 $f: M\to N$ 如果是光滑映照，$i: N\to \mathbb{R}^K$ 是等距嵌入，它的第二基本形式为 B。记 $F=i\circ f$，并记 $F=(f^1, \cdots, f^K)$。从张力场的复合公式(1.64)知 f 调和的条件为

$$\Delta f^i = B^i(f_* e_s, f_* e_s), \tag{5.2}$$

其中 $\{e_s\}$ 是M的局部幺正标架场。调和性表示式 (5.2) 比表示式 (1.29)更优越，前者在 $\mathscr{L}_1^2(M, N)$的意义下，有通常的弱形式。

定义 5.4 对 $f\in \mathscr{L}_1^2(M, N)$，如果它满足 (5.2) 式的弱形式，即对任何 $\psi\in C_0^\infty(M, \mathbb{R}^K)$，有

$$\int_M [\langle\nabla F, \nabla\psi\rangle + \langle B(f_* e_s, f_* e_s), \psi\rangle] *1 = 0, \tag{5.3}$$

那末，f 称为弱调和映照。特别地，能量极小映照是弱调和映照。

注 目标流形N如果是球面 S^n，那末，第二基本形式

$$B(X, Y) = -\langle X, Y\rangle F,$$

其中 X, Y 是N上任一点的二个切向量，这样(5.3)式化为

$$\int_M [\langle\nabla F, \nabla\psi\rangle - |\nabla F|^2\langle F, \psi\rangle] *1 = 0. \tag{5.4}$$

前面用变分直接法得到了 $\mathscr{L}_1^2(M, N)$ 中的能量极小弱调和映照。因 Sobolev 空间 $\mathscr{L}_1^2(M, N)$ 中的映照一般是不连续的。这样，我们感兴趣的问题是我们能否证明弱调和映照，或至少证明能量极小弱调和映照的连续性，甚至光滑性。但是，一般说来，弱调和映照有奇点。最简单的例子是单位实心球体沿径向到它边界球面的收缩映照。设 x 为 $n+1$ 维单位球体 B^{n+1} 中的任一点，$|x|$表示 x 点到原点的欧氏距离。定义

$$f(x) = \frac{x}{|x|},$$

那么 $f\in \mathscr{L}_1^2(B^{n+1}, S^n)$，并且 f 是

$$\mathscr{F} = \{g\in \mathscr{L}_1^2(B^{n+1}, S^n); g|_{S^n} = f|_{S^n}\}$$

中能量极小映照[23]。显然，f 除了原点是光滑的，而原点是 f 的孤立奇点。

§5.2　正则性定理

用变分直接法证明调和映照的存在性，关键是正则性。正则性定理分为二部分。首先是“部分正则性”，即在奇点集以外是Hölder连续的，而奇点集在映照的出发流形上相对“较小”；然后再由主正则性定理，证明映照在奇点集外是光滑的，即所谓“主正则性”。

部分正则性关于出发流形M是局部的，显然关于目标流形是整体的。这从上一节的例子可以看到，孤立奇点的任何小邻域都可映照到整个目标流形N上。一旦建立了部分正则性，我们在任一点$x_0\in M$(当然取x_0不是奇点)附近建立局部坐标，相应地，在$f(x_0)\in N$附近建立局部坐标。在x_0附近，映照f可表示为R^m中某区域Ω上的向量函数$(f^1, \cdots, f^n)$，它们满足非线性椭圆型方程(弱意义下)：

$$\Delta f^\gamma + g^{ij}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}=0.$$

这是一个散度型椭圆型方程组，关于一阶导数是两次的，并且具有主对角部分。根据非线性椭圆型方程组正则性理论来证明映照的光滑性，关键是证明一阶导数的Hölder连续性。这样，方程组中的非线性项可看成给定的Hölder连续的函数，高阶正则性就可由线性椭圆方程的正则性理论得到。具体讨论请参阅文献[53]和[97]。

下面来考察部分正则性。

设$f\in\mathscr{L}^2_1(M, N)$是能量极小的弱调和映照。对任何$p\in M$，如果存在$p$在$M$的邻域$U$，使$f$在$U$中是Hölder连续的，因而是光滑的，那末，$p$称为$f$的*正则点*。正则点的全体是正则集$R$，它是$M$中的开集。设$S=M\backslash R$，那末，$S$是$f$的奇点集，它是$M$的闭集。为了衡量集合的大小，我们引入Hausdorff维数的概念。

设 S 是距离空间中的一个子集，$\mathscr{C}_\varepsilon$ 是 S 的直径小于 ε 的可列覆盖族。定义

$$\psi_\varepsilon(S)=\inf_{C\in\mathscr{C}_\varepsilon}\sum_{\theta\in C}\alpha(p)\left(\frac{\operatorname{diam}\theta}{2}\right)^p, \tag{5.5}$$

其中 $\alpha(p)$ 是 p 维欧氏空间中单位实心球体的体积。从(5.5)式可见，$\psi_\varepsilon(S)$ 是 ε 的单调减小函数。定义 $\varepsilon\to0$ 时，它的极限为 S 的 p 维 Hausdorff 测度 $\mathscr{H}^p(S)$。当我们考虑平面上曲线及三维欧氏空间曲面时，关于曲线的 1 维 Hausdorff 测度就是曲线的弧长，关于曲面的 2 维 Hausdorff 测度就是曲面的面积。

一般地，对任何实数 $p\geqslant0$，都可定义 $\mathscr{H}^p$。不难看出，如果 $\mathscr{H}(S)=\infty$，那末，对任何 $p'<p$，都有 $\mathscr{H}^{p'}(S)=\infty$；而如果 $\mathscr{H}^p(S)=0$，那末，对任何 $p'>p$，都有 $\mathscr{H}^{p'}(S)=0$。所以，每个集合都可定义一个 Hausdorff 维数，即存在一个数 $d(S)\geqslant0$，使

$$\mathscr{H}^p(S)=\begin{cases}0, & \text{当 } p>d(S)\\ \infty, & \text{当 } p<d(S).\end{cases}$$

一方面可考察映照奇点集的维数，另一方面可以将奇点"放大"，得到特殊的映照，即所谓切映照。有下列定义。

定义 5.5 设 R^j 是 j 维欧氏空间，N 是任何 Riemann 流形。如果 $f: R^j\setminus\{0\}\to N$ 是调和映照，并且，在从原点出发的射线上是常值，那末，f 称为**切映照**。进而，如果 f 限制在单位球体 $B^j\subset R^j$ 上是 $\mathscr{L}_1^2(B^j, N)$ 中能量最小映照，那末，f 称为**极小切映照**。

Schoen-Uhlenbeck 证明了下列部分正则性定理[100]、[101]。

定理 5.6 设 M 和 N 是紧致 Riemann 流形，$f: M\to N$ 是 $\mathscr{L}_1^2(M, N)$ 中的能量极小映照，那末，f 在奇点集 S 以外是光滑的，并且 $\dim S\leqslant m-3$，其中 m 是出发流形 M 的维数。当 $m=3$ 时，S 是一个离散集。又如果存在 $l\geqslant3$，对任何 j，$3\leqslant j\leqslant l$，从 $R^j\setminus\{0\}$ 到 N 的极小切映照是常值映照，那末，$\dim S\leqslant m-l-1$；如果 $l=m-1$，那末，S 是离散的。

定理 5.7 设 M 是具 $C^{2,\alpha}$ 边界的紧致流形，N 是紧致流形，

$f: M \to N$ 是 $\mathscr{L}_1^2(M, N)$ 中的能量极小映照。假设 $v \in C^{2,\alpha}(\partial M, N)$，并且 $f|_{\partial M} = v$，那末，f 的奇点集 S 只能由 M 的内点所组成；特别地，f 在 ∂M 的一个邻域内是 $C^{2,\alpha}$ 光滑的。

定理证明的基本想法是运用 Scaling 技巧，从给定的映照 f 出发，对每一点 $p \in M$，构造一个极小切映照 f_0。如果 f_0 是常值映照，那末，p 是 f 的正则点。

对任何 $p \in M$，在 p 点附近建立法坐标 (x^i)。对出发流形的度量和映照都做 Scaling：对任何 $\lambda > 0$，定义 $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$，以及 $g_{ij}^\lambda(x) = g_{ij}(\lambda x)$。这里 g_{ij} 是 M 在 p 点附近度量张量在法坐标下的局部表达式。因此当 λ 充分小时，g_{ij}^λ 充分接近于平坦度量。

能量极小映照有下列重要的单调不等式

$$\frac{d}{d\sigma}\left(e^{c\Lambda\sigma}\sigma^{2-n}\int_{B\sigma} e(f)*1\right) \geqslant 0,$$

其中 C 是依赖于 m 的正常数，Λ 是依赖于 M 的度量张量的正常数，B_σ 表示 M 中以 p 为中心，σ 为半径的测地球。据此有，对 $\lambda > 0$，

$$E_1(f_\lambda) = \lambda^{2-m} E_\lambda(f) \leqslant E_1(f),$$

其中 E_σ 表示映照 f 在 B_σ 中的能量。因此 f_λ 弱收敛于 f_0（如有必要取子序列）。这个 f_0 就是极小切映照。事实上，可证明下列强紧性定理，即对任何 $\Gamma > 0$，$0 < \sigma < 1$，集合

$X_{\Gamma,\sigma} = \{f|_{B\sigma}; f \in \mathscr{L}_1^2(B_\sigma, N)$ 是极小能量映照，并且 $E(f_\sigma) \leqslant \Gamma\}$ 是强紧的。因此 f_λ 强收敛于极小切映照 f_0，从而几乎处处逐点收敛于 f_0。

运用下列 Morrey 的增长引理。

设 $\phi \in \mathscr{L}_1^2(B_1, N)$，如果存在正常数 C，$\alpha (0 < \alpha < 1)$，使对任何 $x \in B_\rho\left(0 < \rho < \frac{1}{4}\right)$，有 $E_{B\sigma(x)}(\phi) \leqslant C\sigma^{m-2+2\alpha} (0 < \sigma < 1/4)$，那末，$\phi \in \zeta^\alpha(B_\rho, N)$。Schoen-Uhlenbeck 证明了重要的正则性估计：存在 $\varepsilon_0(m, N) > 0$，使对任何能量极小映照 $f: B_1 \to N$，如果 $E_1(f) \leqslant \varepsilon_0$，那末，$f$ 在 $B_{\frac{1}{4}}$ 中是光滑的。

利用这个正则性估计，马上可以得到 $\mathscr{H}^{n-2}(S)=0$，并且，对 $p\in S$，所得到的极小切映照 f_0 不可能是常值映照。如果对 $p\in M$，所构造的极小切映照 f_0 是常值映照，那末，f 在 p 附近是光滑的。

他们再应用关于 Hausdorff 测度的密度定理和 Federer 的降维技巧进一步证明 $\dim S\leqslant m-3$，并从非平凡极小切映照的不存在性，得到奇点集 S 维数的更好估计。

关于边界正则性的定理 5.7 的证明还在于下列性质。

设 $f_0\in\mathscr{L}_1^2(B_+^m,N)$，其中 B_+^m 是 m 维欧氏空间中的实心上半单位球体，记 $\Gamma=B^{m-1}\times\{0\}$，$f_0$ 在 $B_+^m\cup\Gamma$ 上是能量极小映照，它沿着从原点出发的径向是常值。如果 $f_0|_\Gamma$ 是常值映照，那末，f_0 一定是常值映照。

由于这个性质，类似于内正则性的证明，可以得到边界正则性。

关于定理 5.6 和定理 5.7 的详细证明，请参阅文献 [100]、[101]。

§5.3 不存在性定理和存在性定理

现在我们考虑到某类 Riemann 流形调和映照的存在性，这是一类比具非正截曲率更广的 Riemann 流形。设 $\gamma:[0,b]\to N$ 是流形 N 中非常值测地线。如果沿测地线 γ，存在满足下列条件的非零 Jacobi 场 $Y(t)$：

$$\nabla_{\gamma'}Y(0)=0,\ Y(t_1)=0(t_1\leqslant b),$$

那末，称 $\gamma(t_1)$ 为 $p=\gamma(0)$ 的焦点(focal point)。

首先容易看出，如果流形 N 具非正截曲率，那末，N 一定没有焦点；另一方面无焦点流形一定是无共轭点流形。Gulliver[49] 具体构造出例子，说明无焦点但截曲率变号的流形是存在的，具有焦点但没有共轭点的流形也是存在的。

我们首先证明下列对我们很要紧的命题[125]。

命题 5.8 设N是完备、单连通无焦点的 Riemann 流形。任取一点$q\in N$，有距离函数$d(q, x)$，d^2是N上的光滑凸函数。

证明 因N上无共轭点，从指数映照的定义及 Cartan-Hadamard 定理，立即知道$f(x)=d^2(q, x)=|\exp_q^{-1}x|^2$是$N$上的光滑函数。设$x\neq q$，$v\in T_xN$，我们证明$v\neq 0$时，$\nabla^2 f(v, v)>0$。

过x作与v相切的测地线ζ: $[0, \varepsilon]\to N$，再用测地线γ_u: $[0, r]\to N$将q与$\zeta(u)$相连结，其中$r=d(q, x)$，$\gamma=\gamma_0$是以弧长为参数的测地线。因N中任何两点只能用一条测地线相连结，所以γ_u构成单参数测地线族。它的横截向量场U显然满足

$$U(0)=\frac{\partial}{\partial u}\gamma_u\Big|_{\substack{t=0\\u=0}}=0,$$

$$U(r)=\frac{\partial}{\partial u}\gamma_u\Big|_{\substack{t=r\\u=0}}=\frac{\partial}{\partial u}\zeta(u)\big|_{u=0}=v.$$

将它们代入测地线的第二变分公式,我们有

$$L''(0)=\int_0^r\{|\dot{U}^\perp|^2-\langle R(\dot{\gamma}, U^\perp)\dot{\gamma}, U^\perp\rangle\}dt. \tag{5.6}$$

沿着γ_0存在$n-1$个线性独立的与测地线γ_0正交的 Jacobi 场$J_i(i=1, \cdots, n-1)$，满足$\dot{J}_i(r)=0$。N上无焦点的假定还意味着J_i沿着测地线每一点是$n-1$个线性独立的向量。这样,设

$$U^\perp(t)=f_i(t)J_i(t),$$

其中$f_i(0)=0$。代入(5.6)式,得到

$$\begin{aligned}L''(0)&=\int_0^r\{\dot{f}_i\dot{f}_j\langle J_i, J_j\rangle+f_if_j\langle\dot{J}_i, \dot{J}_j\rangle+\dot{f}_if_j\langle J_i, \dot{J}_j\rangle\\&\quad+f_i\dot{f}_j\langle\dot{J}_i, J_j\rangle-\langle R(\dot{\gamma}, f_iJ_i)\dot{\gamma}, f_iJ_j\rangle\}dt\\&\overset{\text{def}}{=\!=}A+B+C+D-E.\end{aligned}$$

考虑到 Jacobi 方程和初始条件$f_i(0)=0$，以及$\dot{J}_i(\gamma)=0$，

$$B=\int_0^r f_if_j\langle\dot{J}_i, \dot{J}_j\rangle dt=-C-D+E$$

因此，

$$L''(0)=\int_0^r\langle\dot{f}_iJ_i, \dot{f}_jJ_j\rangle dt\geqslant 0.$$

上式等号成立的充要条件为 $\dot{f}_t J_t = 0$。这与 J_t 沿 γ_0 点点独立相矛盾。因此，$L''(0) > 0$。

并且，

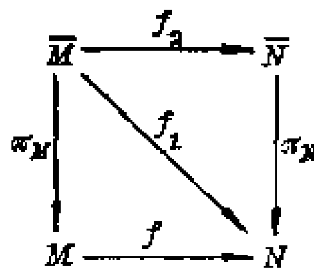
$$\nabla^2 f(v, v) = \dot{\zeta}\dot{\zeta} f|_{u=0} - (\nabla_{\dot{\zeta}}\dot{\zeta}) f$$
$$= \frac{d^2}{du^2} f(\zeta(u))|_{u=0}$$
$$= 2r \frac{d^2}{du^2} L(u)|_{u=0} + 2\left(\frac{d}{du} L(u)\right)^2\Big|_{u=0},$$

其中 $L(u)$ 表示 γ_u 的弧长。这就证明了 $\nabla^2 f(v, v) > 0$，即 $\nabla^2 f$ 在 $N \setminus \{q\}$ 上是正定的。而 $\nabla^2 f$ 在 $T_q N$ 上的正定性显然成立，并且与流形的具体度量无关。∎

由于无焦点流形中距离函数凸性，我们可以证明下列非平凡调和映照的不存在性。

定理 5.9[126] 设 M 是紧致的 Riemann 流形，它具有有限基本群 $\pi_1(M)$，N 是完备的无焦点流形，那末，从 M 到 N 的任何调和映照一定是常值映照。

证明 设 $\overline{M}$ 是 M 的通用覆盖，覆盖映照是 π_M，而 $\pi_N: \overline{N} \to N$ 是目标流形的通用覆盖。由于 M 紧致且具有有限基本群，所以 $\overline{M}$ 也为紧流形，π_M 和 π_N 都是局部等距。容易看出 $\overline{N}$ 也是无焦点流形。



设 $f: M \to N$ 是任一调和映照。那末，$f_1 = f \circ \pi_M: \overline{M} \to N$ 显然是调和映照。由于 $\overline{M}$ 单连通，我们有提升映照 $f_2: \overline{M} \to \overline{N}$，满足 $f_1 = \pi_N \circ f_2$，即我们有右边的交换图[60]，同样容易看出，f_2 也是调和映照，并且对任何 $x \in \overline{M}$ 有

$$\pi_{N*}\tau(f_2)(x) = \tau(f)(\pi_M(x)),$$
$$e(f_2)(x) = e(f)(\pi_M(x)).$$

设 $\rho = d^2(q, x)$ 是 $\overline{N}$ 上从任一点出发的距离函数平方，根据命题 5.8，它是光滑凸函数。考虑 $\overline{M}$ 上的函数 $\rho \circ f_2$，从推论 1.17 知，f_2 是常值映照；因此，f 是常值映照。∎

定理 5.10[126] 设N是无共轭点的闭曲面。那末，任何调和映照$f: S^2\to N$一定是常值映照。

证明 Burns[7]证明了单连通，完备曲面，如果它无共轭点，一定存在凸函数。那末，用上面证明定理5.9类似的方法，也可得到定理5.10。

定理 5.11[126] 设M和N都是紧致Riemann流形，并且N无焦点。那末，从M到N映照的每一同伦类中都存在一个调和映照$f: M\to N$，它达到该同伦类中能量泛函的最小值。

证明 众所周知，目标流形的通用覆盖流形是R^n，即N是所谓$K(\pi, 1)$流形。这时，从M到N映照的同伦类1-1对应于$\pi_1(M)$到$\pi_1(N)$同态映照的共轭类（如可参考Spanier的书[113]）。对$\mathscr{L}_1^2(M, N)$映照在基本群$\pi_1(M)$上的作用的意义由文献[104]所给出。设γ是M中的嵌入闭曲线，它是$\pi_1(M)$的一个生成元。取γ在M上的管状邻域T，使$\psi: S^1\times D^{m-1}\to T$是局部微分同胚，其中$D^{m-1}$是$(m-1)$维胞腔。那末，对几乎所有$S\in D^{m-1}$，$f$在$\gamma^s(t)=\psi(t, s)$上是连续的。取$s_0\in D^{m-1}$，使$f$在$\gamma^{s_0}$上连续。由$f_*[\gamma^{s_0}]=[f(\gamma^{s_0})]$定义诱导映照$f_*$在$\pi_1(M)$的任一生成元上的映象，并按群同态扩充成映照

$$f_*: \pi_1(M)\to\pi_1(N).$$

在文献[104]和[8]中证明了映照f_*是有意义的，并且在相差一个共轭类的情形下，f_*不依赖于s_0的选取。

设$\phi: M\to N$是任一光滑映照。取映照类

$$\mathscr{F}_\phi=\{f\in\mathscr{L}_1^2(M, N);\ f_*=\tau^{-1}\phi_*\tau,\ \ \tau\text{ 是从 }f(\cdot)\text{ 到 }\phi(\cdot)\text{ 的曲线}\}.$$

在$\mathscr{F}_\phi$中考虑极小化序列$\{f_i\}$，那末，有子序列，仍记为$\{f_i\}$，在$\mathscr{L}_1^2(M, R^K)$中弱收敛于f，且按$\mathscr{L}_1^2$强收敛并且几乎处处逐点收敛于f，并由能量泛函的下半连续性得到

$$E(f)=\inf_{f'\in\mathscr{F}_\phi}E(f')$$

设$\gamma_1, \cdots, \gamma_l$是$M$的某点的基本群$\pi_1(M)$的生成元，它的管

状邻域为 $T_1, \cdots, T_l$，分别看成 $S^1\times D^{m-1}$。由于能量在 $\{f_i\}$ 上一致有界，从 Fubini 定理和 Fatou 引理，对几乎所有 $s\in D^{m-1}$，存在常数 K_s，使

$$\int_{S^1} |df_i(t, s)|^2 dt \leqslant K_s,$$

对无穷多 i 成立。那末，由 Sobolev 空间紧嵌入定理，存在子序列，仍记为 $\{f_i\}$，在 γ_j^s 上一致收敛于 f，其中 $j=1, \cdots, l$。这就说明了 $f\in\mathscr{F}_\phi$。从而

$$E(f)=\inf_{f'\in\mathscr{F}_\phi} E(f').$$

另一方面，根据前面定理 5.9，由于任何从 $S^j(j\geqslant 2)$ 到 N 的调和映照是常值映照，即从 $\mathbb{R}^{j+1}\setminus\{0\}$ 到 N 的切映照是常值映照，根据定理 5.6，我们得到的 $\mathscr{F}_\phi$ 中能量极小映照 f 是光滑的。

类似地，我们有下面定理。

定理 5.12[126] 设 M 是 3 维紧致 Riemann 流形，N 是闭曲面无共轭点。那末，从 M 到 N 映照的任一同伦类中必存在一个调和映照，它的能量在该同伦类中是极小的。

定理 5.13[125] 设 M 是紧致有边的 Riemann 流形，N 是紧致无焦点的流形。对给定的光滑映照 $v: \partial M\to N$，必存在调和映照 $f: M\to N$，使 $f|_{\partial M}=v$。

注 1 显然可见，上述定理 5.11 是 Eells-Sampson 关于调和映照基本存在定理的一个推广。

注 2 设 M 是紧致有边的 Riemann 流形，N 是紧致流形，如果它的截曲率以常数 $K>0$ 为上界，并且设 $v: \partial M\to N$，使

$$v(\partial M)\subset B_R(y_0),\ R<\pi/2\sqrt{K},$$

$B_R(y_0)$ 是以 y_0 为中心，R 为半径的法测地球。Hildebrandt-Kaul-Widman 证明了调和映照边值问题的存在性[54]。考虑到 $B_R(y_0)$ 中从 y_0 出发距离函数的凸性，他们的定理也可用上述讨论的类似方法得到。

§5.4　到正曲率流形调和映照的正则性

当目标流形不是$K(\pi,1)$时，调和映照的存在性问题变得很复杂。但仍可应用定理5.6来分析极小能量映照奇点集的维数。Schoen-Uhlenbeck在文献[102]中讨论了到球面广义极小能量映照的情形，其中关键是推导稳定性不等式。当以球面作为目标流形时，取变分截面为沿着映象的共形向量场，从而得到稳定性不等式。类似技巧也可在欧氏空间中的一类子流形、紧不可约齐性空间、以及δ-pinching流形等情形加以运用[130]、[131]、[134]。更一般地，可分析到这类流形广义p-调和映照的奇点集[141]。

首先证明下列结果。

设

$$d(A,K)=\begin{cases}2, & 如果\ \dfrac{K}{K-A}\leqslant 1\\ 5, & 如果\ \dfrac{K}{K-A}=5\\ \left[\min\left(1+\dfrac{K}{K-A},\ 6\right)\right], & 其他\end{cases}$$

其中$[t]$表示t的整数部分。

定理5.14　设M和N是紧致Riemann流形，它们的维数分别是m和n。设N的截面曲率的上界是K，如果存在只依赖于N的常数A，使对任何极小切映照$\phi: \mathbb{R}^l\backslash\{0\}\to N$，$3\leqslant l\leqslant d(A,K)$，有不等式

$$\int_{\mathbb{R}^l}(|\nabla u|^2-A|d\phi|^2u^2)*1\geqslant 0,\tag{5.7}$$

其中u是$\mathbb{R}^l\backslash\{0\}$上具紧致支集的光滑函数，那末，当$m\leqslant d(A,K)$时，任何能量极小映照$f\in\mathscr{L}_1^2(M,N)$是光滑的；如果$m=d(A,K)+1$，则$f$的奇点集是离散集；一般地，$f$奇点集的Hausdorff维数至多是$m-d(A,K)-1$。

证明　根据定理5.6，只要证明任何极小切映照$\phi: \mathbb{R}^l\backslash\{0\}\to$

N, $3\leqslant l\leqslant d(A, K)$是常值映照。任何切映照 ϕ，诱导了调和映照 ϕ: $S^{l-1}\to N$。由计算，(5.7)式不难化为

$$\int_{S^{l-1}\times(0,\infty)}\left(-\Delta u-A|d\phi|^2u-r^2\frac{\partial^2u}{\partial r^2}\right.$$
$$\left.-r(l-1)\frac{\partial u}{\partial r}\right)r^{l-3}u*1\geqslant 0, \qquad (5.8)$$

其中 Δ 表示 S^{l-1} 上的 Laplace 算子。考虑 S^{l-1} 上的强椭圆算子

$$L_1=\Delta+A|d\phi|^2$$

和$(0,\infty)$上的常微分算子

$$L_2=r^2\frac{d^2}{dr^2}+(l-1)r\frac{d}{dr}.$$

L_1 和 L_2 的特征值分别是

$$\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_i\leqslant\to\infty,$$
$$\delta_1\leqslant\delta_2\leqslant\cdots\leqslant\delta_i\leqslant\to\infty,$$

用 Simons 在文献[108]中的方法，(5.8)式的条件就化为

$$\mu_1+\delta_1\geqslant 0. \qquad (5.9)$$

而直接计算得到

$$\delta_1=\frac{(l-2)^2}{4}, \qquad (5.10)$$

下面来估计 μ_1。在关于能量密度的 Bochner 型公式(1.50)中，考虑到 S^{l-1} 和N的曲率条件，我们有

$$\frac{1}{2}\Delta|d\phi|^2\geqslant|\nabla d\phi|^2+(l-2)|d\phi|^2-\frac{l-2}{l-1}K|d\phi|^4. \qquad (5.11)$$

从文献[99]和[102]中的计算可知

$$|\nabla d\phi|^2\geqslant|\nabla|d\phi||^2,$$

(5.11)式化为

$$|d\phi|\Delta|d\phi|\geqslant\frac{1}{2}\Delta|d\phi|^2-|\nabla d\phi|^2$$
$$\geqslant(l-2)|d\phi|^2-\frac{l-2}{l-1}K|d\phi|^4. \qquad (5.12)$$

设

$$\phi_\varepsilon=(|d\phi|^2+\varepsilon)^{1/2},$$

那末

$$\phi_\varepsilon\Delta\phi_\varepsilon\geqslant(l-2)|d\phi|^2-\frac{K(l-2)}{l-1}|d\phi|^4,$$

并且

$$-\phi_\varepsilon\Delta\phi_\varepsilon-\frac{K(l-2)}{l-1}\phi_\varepsilon^2|d\phi|^2\leqslant-(l-2)|d\phi|^2. \qquad (5.13)$$

如果 $l\leqslant d(A,K)$，即

$$\frac{K(l-2)}{l-1}<A,$$

并且 ϕ 不是常值映照，那末(5.13)式意味着

$$\mu_1\leqslant\inf\frac{\int_{S^{l-1}}(-\Delta\phi_\varepsilon-A|d\phi|^2\phi_\varepsilon)\phi_\varepsilon*1}{\int_{S^{l-1}}\phi_\varepsilon^2*1}$$

$$<\inf\frac{\int_{S^{l-1}}\left(-\Delta\phi_\varepsilon-\frac{K(l-2)}{l-1}\phi_\varepsilon^2|d\phi|^2\right)\phi_\varepsilon*1}{\int_{S^{l-1}}\phi_\varepsilon^2*1}\leqslant 2-l. \qquad (5.14)$$

从(5.9)式、(5.10)式和(5.14)式立即得到 $l>6$，这和 $l\leqslant d(A,K)$ 相矛盾。因此，ϕ 只可能是常值映照。 ∎

下面，我们对正曲率流形的多种情形给出稳定性不等式(5.7)，其中 A 由具体的几何量所决定。

5.4.1 设 N 是欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的 n 维紧致子流形，$B(\cdot,\cdot)$ 是 N 在 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的第二基本形式。取 $\{\varepsilon_i\}$，$i=1,\cdots,n$ 是 N 上局部幺正标架场，a 是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的常向量。设 L 是 l 维 Riemann 流形，$\phi: L\to N$ 是任一稳定调和映照。取 u 是 L 上具紧致支集的光滑函数，令

$$v=u\langle a,\varepsilon_i\rangle\varepsilon_i.$$

那末

$$\nabla_{e_\alpha}v=\nabla_{e_\alpha}(ua^T)=(e_\alpha u)a^T+u\langle a^N,B(\phi_*e_\alpha,\varepsilon_i)\rangle\varepsilon_i,$$

这里$\{e_\alpha\}$ $(\alpha=1, \cdots, l)$表示流形L上的局部幺正标架场，a^T表示a在N上的切向投影，a^N表示a在N的法空间上投影。我们有

$$
\begin{aligned}
&|\nabla v|^2-\langle R^N(\phi_* e_\alpha, v)\phi_* e_\alpha, v\rangle \\
&=\sum_\alpha(|e_\alpha u|^2|a^T|^2+u^2\sum_i\langle B(\phi_* e_\alpha, \varepsilon_i), a^N\rangle^2) \\
&\quad+2(e_\alpha u)u\langle B(\phi_* e_\alpha, \varepsilon_i), a^N\rangle\langle a^T, \varepsilon_i\rangle \\
&\quad-u^2\langle R^N(\phi_* e_\alpha, a^T)\phi_* e_\alpha, a^T\rangle,
\end{aligned}
$$

将它代入第二变分公式 (1.67)，得到定义在$\mathbb{R}^{n+k}$上的一个二次型。取它的迹得到

$$
\begin{aligned}
&\int_L(n|\nabla u|^2+(\sum_{i,\alpha}|B(\phi_* e_\alpha, \varepsilon_i)|^2 \\
&\quad-\langle R^N(\phi_* e_\alpha, \varepsilon_i)\phi_* e_\alpha, \varepsilon_i\rangle u^2)*1\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

再用子流形N的高斯方程，上式化为

$$
\begin{aligned}
&\int_L(n|\nabla u|^2+u^2(2\sum_{i,\alpha}|B(\phi_* e_\alpha, \varepsilon_i)|^2 \\
&\quad-\langle B(\phi_* e_\alpha, \phi_* e_\alpha), B(\varepsilon_i, \varepsilon_i)\rangle))*1\geqslant 0. \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

为了得到不等式(5.7)中A的更明显的表达式，这里采用不同于文献[130]中的方法。

取N在$\mathbb{R}^{n+k}$中的法丛的局部幺正标架场$\{e_s\}$ $(s=n+1, \cdots, n+k)$，那末，$B(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=h^s_{ij}\varepsilon_s$。设$S$是$N$的第二基本形式长度平方，$H$是平均曲率向量场，即

$$S=\sum_{i,j,s}(h^s_{ij})^2, \quad H=\frac{1}{n}h^s_{ii}e_s,$$

设N中满足$H(x)\neq 0$的点，设

$$S_H=\sum_{i,j,s}\langle h^s_{ij}\varepsilon_s, \frac{H}{|H|}\rangle^2.$$

为进一步化简(5.15)式，我们需要下列代数引理，它可用拉格朗日乘数法求得[120]。

引理 5.15 设(a_{ij})是$n\times n$的对称矩阵，

$$a=\operatorname{tr}(a_{ij}), \quad b=\sum_{i,j}a^2_{ij},$$

那末，对任何i，有

$$2\sum_k a_{ki}^2 - a a_{ii} \leqslant \frac{2(n-1)}{n} b$$

$$+\frac{|(n-4)a|}{n}\sqrt{\frac{n-1}{n}\left(b-\frac{a^2}{n}\right)}-\frac{3n-4}{n^2}a^2.$$

假定 $\phi_* e_\alpha$ 在某点非零，那末，在该点附近取

$$\varepsilon_n = \frac{\phi_* e_\alpha}{|\phi_* e_\alpha|},$$

并不妨假定H在该点也非零，因而取

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{H}{|H|}.$$

这样，我们可对每个对称矩阵(h_{ij}^s) $(s=n+1, \cdots, n+k)$，利用上面引理，且考虑到，在标架的特定选取下，有

$$\sum_i h_{ii}^\lambda = 0,\ \lambda = n+2,\ \cdots,\ n+k,$$

以及

$$\left|\sum_i h_{ii}^{n+1}\right| = n|H|,$$

所以

$$2\sum_{i,\alpha}|B(\phi_* e_\alpha, \varepsilon_i)|^2 - \langle B(\phi_* e_\alpha, \phi_* e_\alpha), B(\varepsilon_i, \varepsilon_i)\rangle$$

$$\leqslant |d\phi|^2\left(\frac{2(n-1)}{n} S\right.$$

$$\left.+|(n-4)H|\sqrt{\frac{n-1}{n}(S_H - n|H|^2)}-(3n-4)|H|^2\right). \tag{5.16}$$

上式在 $\phi_* e_\alpha = 0$ 以及 $H=0$ 的点也同样成立。从 (5.15) 式和 (5.16)式立即得到稳定性不等式

$$\int_L (|\nabla u|^2 - A|d\phi|^2 u^2) * 1 \geqslant 0, \tag{5.17}$$

其中

$$A = \frac{1}{n}\min\left((3n-4)|H|^2 - \frac{2(n-1)}{n} S\right.$$

$$\left.-|(n-4)H|\sqrt{\frac{n-1}{n}(S_H - n|H|^2)}\right).$$

如果 $A>0$，对 R^{n+k} 中的这样子流形就可运用定理5.14得到极小能量映照 $f\in\mathscr{L}_1^2(M,N)$ 奇点集维数的结论。特别地，当 N 是球面 S^n 时，$A=\dfrac{2-n}{2}$。这就是在文献 [102] 中的稳定性不等式。事实上，由(5.17)式定义的 $A>0$ 的子流形 N 是很多的。

5.4.2 设 N 是紧致不可约齐性空间 G/H，$\phi: L\to G/H$ 是稳定调和映照。设 F 是 N 上 Laplace 算子的特征函数，对应的非零特征值是 λ，即 $\Delta F+\lambda F=0$。取 L 上向量丛 $\phi^{-1}TN$ 的截面 $v=u\nabla F$，其中 u 是 L 上具紧致支集的光滑函数。那末，

$$\nabla_{e_i}v=e_i(u)(\nabla_{\varepsilon_\alpha}F)\varepsilon_\alpha+u\langle\phi_*e_i,\ \varepsilon_\beta\rangle(\nabla_{\varepsilon_\beta}\nabla_{\varepsilon_\alpha}F)\varepsilon_\alpha,$$

其中 $\{e_i\}$ 是 L 上局部幺正标架场，$\{\varepsilon_\alpha\}$ 是 N 上对应点的局部幺正法标架场。并且

$$\begin{aligned}|\nabla_{e_i}v|^2=&|\nabla u|^2(\nabla_{\varepsilon_\alpha}F)(\nabla_{\varepsilon_\alpha}F)\\&+u^2\langle\phi_*e_i,\ \varepsilon_\beta\rangle\langle\phi_*e_i,\ \varepsilon_\gamma\rangle(\nabla_{\varepsilon_\beta}\nabla_{\varepsilon_\alpha}F)(\nabla_{\varepsilon_\gamma}\nabla_{\varepsilon_\alpha}F)\\&+2u(e_i(u))\langle\phi_*e_i,\ \varepsilon_\beta\rangle(\nabla_{\varepsilon_\alpha}F)(\nabla_{\varepsilon_\beta}\nabla_{\varepsilon_\alpha}F).\end{aligned}$$

将它代入第二变分公式(1.67)得到

$$\begin{aligned}&\int_L\{|\nabla u|^2(\nabla_{\varepsilon_\alpha}F)(\nabla_{\varepsilon_\alpha}F)\\&+u^2\langle\phi_*e_i,\ \varepsilon_\beta\rangle\langle\phi_*e_i,\ \varepsilon_\gamma\rangle(\nabla_{\varepsilon_\beta}\nabla_{\varepsilon_\alpha}F)(\nabla_{\varepsilon_\gamma}\nabla_{\varepsilon_\alpha}F)\\&+2u(e_i(u))\langle\phi_*e_i,\ \varepsilon_\beta\rangle(\nabla_{\varepsilon_\alpha}F)(\nabla_{\varepsilon_\beta}\nabla_{\varepsilon_\alpha}F)\\&-u^2\langle R^N(\phi_*e_i,\ \varepsilon_\alpha)\phi_*e_i,\ \varepsilon_\beta\rangle(\nabla_{\varepsilon_\alpha}F)(\nabla_{\varepsilon_\beta}F)\}*1\geqslant0\end{aligned}\tag{5.18}$$

考虑到关于 λ 的特征空间 E_λ 是有限维向量空间，并且关于 L^2 的内积构成欧氏空间。这样不等式(5.18)的左端是 E_λ 上的二次型。

设 $F^1,\cdots,F^k$ 是 E_λ 上的幺正基，G 在 E_λ 上有自然的作用：对任何 $g\in G$ 和 $F\in E_\lambda$，$g^*F=F\circ g$。由于 Laplace 算子和等距可换，E_λ 在 G 的作用下不变，并且还保持 L^2 内积不变。这说明 $g^*F^1,\cdots,g^*F^k$ 还是 E_λ 的幺正基，即存在正交矩阵 O_{ab}，使

$$g^*F^a=O_{ab}F^b.$$

因此，有 $T_0(G/H)$ 上对称的 G 不变的二次型：

$$(\nabla F^{a})(\nabla F^{a})(X, Y)=(\nabla_X F^{a})(\nabla_Y F^{a}),$$

其中 $X, Y\in T_0(G/H)$。这使得我们可考虑切空间的变换 A:

$$T_0(G/H)\to T_0(G/H):$$

$$\langle AX, Y\rangle=(\nabla_X F^{a})(\nabla_Y F^{a}),$$

不难看出 A 是对称变换，并且 A 关于 $T_0(G/H)$ 的度量的特征空间是不变的，从 H 的不可约性就推出 $A=C\cdot id$，其中 C 是正常数。由此得到

$$(\nabla_{e_\alpha}F^{a})(\nabla_{e_\alpha}F^{a})=nC, \tag{5.19}$$

$$(\nabla_{e_\alpha}F^{a})(\nabla_{e_\beta}\nabla_{e_\alpha}F^{a})=0. \tag{5.20}$$

类似地，有

$$(\nabla_X\nabla_{e_\alpha}F^{a})(\nabla_Y\nabla_{e_\alpha}F^{a})=\bar{C}\langle X, Y\rangle \tag{5.21}$$

从(5.19)式和(5.20)式，我们有

$$\begin{aligned}\bar{C}&=-\frac{1}{n}(\nabla_{e_\beta}\nabla_{e_\beta}\nabla_{e_\alpha}F^{a})(\nabla_{e_\alpha}F^{a})\\&=-\frac{1}{n}\langle\nabla\Delta F^{a}+\mathrm{Ric}\nabla F^{a}, e_\alpha\rangle(\nabla_{e_\alpha}F^{a})\\&=-\frac{1}{n}\left(-\lambda+\frac{s}{n}\right)(\nabla_{e_\alpha}F^{a})(\nabla_{e_\alpha}F^{a})\\&=C\left(\lambda-\frac{s}{n}\right),\end{aligned} \tag{5.22}$$

这里已考虑到不可约齐性空间必是爱因斯坦空间，并具有常数数量曲率 s。这样，对(5.18)式取迹，并将(5.19)式、(5.20)式(5.21)式和(5.22)式代入，得到

$$\int_L\left(|\nabla u|^2-\frac{1}{n^2}(2s-n\lambda)|d\phi|^2u^2\right)*1\geqslant 0. \tag{5.23}$$

比较(5.7)式和(5.23)式，对紧致不可约齐性空间 N，我们可定义

$$d(n)=\begin{cases}2, & \text{如果 } \dfrac{Kn^2}{Kn^2-(2s-n\lambda)}\leqslant 1\\ 5, & \text{如果 } \dfrac{Kn^2}{Kn^2-(2s-n\lambda)}=5\\ \left[\min\left(1+\dfrac{Kn^2}{Kn^2-(2s-n\lambda)}, 6\right)\right], & \text{其他}\end{cases}$$

从定理 5.14 得到[131]下面结论。

定理 5.16 设M是m维紧致的 Riemann 流形，G/H是n维紧致不可约齐性空间，$f\in\mathscr{L}_1^2(M, N)$ 是能量极小映照。当$m\leqslant d(n)$时，f是光滑的，当 $m=d(n)+1$时，f至多有离散奇点，一般地，f奇点集的维数至多为 $m-d(n)-1$。

注 当N为S^n时，$s=n(n-1)$，λ取为第一非零特征值n，那末，(5.23)式也是球面为目标流形时稳定性不等式的推广。

5.4.3 现在，我们研究到δ-pinching 流形能量极小映照的正则性。设N是完备、单连通的流形，它的截面曲率K满足$\delta<K\leqslant 1$，其中δ是正常数。Ruh 对流形N引入下列结构。设$E=TN\oplus\varepsilon(N)$是N上的 Riemann 向量丛，其中TN是N的切丛，$\varepsilon(N)$是具有纤维度量的平凡线丛。那末，在E上有二个联络∇'和∇''，其中∇'是平坦联络，而∇''由下式所定义：

$$\begin{cases}\nabla''_X Y=\nabla_X Y-\langle X, Y\rangle e\\ \nabla''_X e=X,\end{cases}\tag{5.24}$$

这里 $X, Y\in\Gamma(TN)$，∇是N上的 Levi-Civita 联络，e是$\varepsilon(N)$上的单位截面。在以后的论文[40]、[41]中，Ruh 等人又具体估计了∇'和∇''的差别。首先，用乘以$\frac{1}{2}(1+\delta)$，使N的截曲率K落在区间$\left(\frac{2\delta}{1+\delta}, \frac{2}{1+\delta}\right]$中，那末，

$$\|\nabla'-\nabla''\|\leqslant\frac{1}{2}k_3(\delta),\tag{5.25}$$

其中

$$\|\nabla'-\nabla''\|\overset{\text{def.}}{=}\max\{|\nabla'_X Y-\nabla''_X Y|;\ X\in\Gamma(TN),\ |X|=1,\ Y\in\Gamma(E),\ |Y|=1\},$$

并且

$$\begin{cases}k_1(\delta)=\frac{4}{3}(1-\delta)^{\delta^{-1}}\left[1+\left(\delta^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\pi}{2}\delta^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right],\\ k_2(\delta)=\left[\frac{1}{2}(1+\delta)\right]^{-1}k_1(\delta),\\ k_3(\delta)=k_2(\delta)\left\{1+\left[1-\frac{1}{24}\pi^2(k_1(\delta))^2\right]^{-2}\right\}^{\frac{1}{2}}.\end{cases}\tag{5.26}$$

设 $\phi: L\to N$ 是稳定调和映照。设

$$\Theta=\{V\in\Gamma(E);\ 对任何\ X\in\Gamma(TN),\ \nabla'_X V=0\}.$$

它是 $n+1$ 维欧氏空间．我们用 V^T 表示 V 在 TN 上投影，类似于 5.4.1 的情形，取 L 上 $\phi^{-1}TN$ 的截面为

$$v=uV^T,$$

其中 u 是 L 上具紧致支集的函数。取 L 上的局部幺正标架场 $\{e_i\}$，

$$\nabla_{e_i}v=(\nabla_{e_i}u)V^T+u\nabla_{e_i}V^T,$$

并且

$$\begin{aligned}|\nabla v|^2=&|\nabla u|^2\langle V^T,\ V^T\rangle+2u\nabla_{e_i}u\langle V^T,\ \nabla_{e_i}V^T\rangle\\&+u^2\langle\nabla_{e_i}V^T,\ \nabla_{e_i}V^T\rangle.\end{aligned}$$

将它代入第二变分公式(1.67)得到

$$\begin{aligned}\int_L&[|\nabla u|^2\langle V^T,\ V^T\rangle+2u\nabla_{e_i}u\langle V^T,\ \nabla_{e_i}V^T\rangle\\&+u^2(\langle\nabla_{e_i}V^T,\ \nabla_{e_i}V^T\rangle-\langle R^N(\phi_*e_i,\ V^T)\phi_*e_i,\ V^T\rangle)]*1\geqslant 0.\end{aligned}\tag{5.27}$$

对任何 $x\in L$，取 TN 在 $\phi(x)$ 的幺正基，以及 $e(N)$ 在 $\phi(x)$ 点的单位向量 e。在 E 中，用联络 ∇' 将它们平行移动，得到 Θ 的幺正基 $\{\hat{\varepsilon}_\alpha,\ \hat{e}\}$。因此

$$\operatorname{trace}\langle V^T,\ V^T\rangle_x=\sum_{\alpha=1}^n\langle\varepsilon_\alpha,\ \varepsilon_\alpha\rangle=n.\tag{5.28}$$

考虑到

$$\langle V^T,\ \nabla_{e_i}V^T\rangle=\frac{1}{2}\nabla_{e_i}\langle V,\ V\rangle-\langle V,\ e\rangle\nabla_{e_i}\langle V,\ e\rangle,$$

我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{trace}\langle V^T,\ \nabla_{e_i}V^T\rangle_x&=\sum_\alpha\langle\hat{\varepsilon}_\alpha^T,\ \nabla_{e_i}\hat{\varepsilon}_\alpha^T\rangle_x+\langle\hat{e}^T,\ \nabla_{e_i}\hat{e}^T\rangle_x\\&=\sum_\alpha\langle\hat{\varepsilon}_\alpha^T,\ \nabla_{e_i}\hat{\varepsilon}_\alpha^T\rangle_x=\frac{1}{2}\nabla_{e_i}\langle\hat{\varepsilon}_\alpha\hat{\varepsilon}_\alpha\rangle=0.\end{aligned}\tag{5.29}$$

从(5.24)式，我们有

$$\begin{aligned}\nabla_{e_i}V^T&=\nabla''_{\phi_*e_i}V^T+\langle V,\ \phi_*e_i\rangle e\\&=\nabla''_{\phi_*e_i}(V-\langle V,\ e\rangle e)+\langle V,\ \phi_*e_i\rangle e\end{aligned}$$

$$= (\nabla''_{\phi_* e_i} V)^T - \langle V, e\rangle \phi_* e_i, \tag{5.30}$$

再考虑到(5.26)式，

$$\langle \nabla_{e_i} V^T, \nabla_{e_i} V^T\rangle_x \leqslant (1+C)\langle \nabla''_{\phi_* e_i} V, \nabla''_{\phi_* e_i} V\rangle$$

$$+\left(1+\frac{1}{C}\right)\langle V, e\rangle\langle V, e\rangle |d\phi|^2$$

$$= (1+C)\,|(\nabla''_{\phi_* e_i} - \nabla'_{\phi_* e_i})V|^2 + \left(1+\frac{1}{C}\right)\langle V, e\rangle\langle V, e\rangle |d\phi|^2$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{4}(1+C)k_3^2(\delta)\langle V, V\rangle + \left(1+\frac{1}{C}\right)\langle V, e\rangle\langle V, e\rangle\right]|d\phi|^2,$$

由此可得

$$\operatorname{trace}\langle \nabla_{e_i} V^T, \nabla_{e_i} V^T\rangle_x \leqslant \left[\frac{(n+1)(1+C)}{4}k_3^2(\delta) + 1 + \frac{1}{C}\right]|d\phi|^2, \tag{5.31}$$

其中 C 是常数，以后再取定它。从 N 的规范截曲率下界，我们有

$$\operatorname{trace}\langle R^N(\phi_* e_i, V^T)\phi_* e_i, V^T\rangle_x \geqslant \frac{2\delta}{1+\delta}(n-1)|d\phi|^2. \tag{5.32}$$

将(5.27)式取迹，并且将(5.28)式、(5.29)式、(5.31)式和(5.32)式代入，得到

$$\int_L n|\nabla u|^2 + \left[\frac{(n+1)(1+C)}{4}k_3^2(\delta) + 1 + \frac{1}{C} - \frac{2\delta}{1+\delta}(n-1)\right]|d\phi|^2 u^2 * 1 \geqslant 0. \tag{5.33}$$

取 $C = \dfrac{2}{k_3(\delta)\sqrt{n+1}}$，

我们得到稳定性不等式

$$\int_L \left(|\nabla u|^2 + \frac{k(n, \delta)}{n}|d\phi|^2 u^2\right) * 1 \geqslant 0, \tag{5.34}$$

其中

$$k(n, \delta) = \frac{n+1}{4}k_3^2(\delta) + \sqrt{n+1}\,k_3(\delta) + 1 - \frac{2\delta}{1+\delta}(n-1). \tag{5.35}$$

注 当 $\delta \to 1$ 时，$k(n, \delta) \to 2-n$，因此(5.34)式是球面 S^n 作

为目标流形时稳定性不定式的推广。

因此，我们可以得到下列定理。令

$$
d(n)=\begin{cases}2, & \text{当 } \dfrac{2n}{2n+(1+\delta)k(n,\ \delta)}\leqslant 1\\ 5, & \text{当 } \dfrac{2n}{2n+(1+\delta)k(n,\ \delta)}=5\\ \min\left(1+\dfrac{2n}{2n+(1+\delta)k(n,\ \delta)},\ 6\right), & \text{其他.}\end{cases}
$$

定理 5.17[134]　设 M 是紧致的 m 维 Riemann 流形，N 是 n 维完备单通的 δ-pinching 流形，它的规范截曲率在区间

$$\left(\frac{2\delta}{1+\delta},\ \frac{2}{1+\delta}\right]$$

中，$f\in\mathscr{L}_1^2(M,\ N)$ 是极小能量映照。如果 $m\leqslant d(n)$，那末，f 是光滑的；如果 $m=d(n)+1$，那末，f 的奇点集是离散的；一般地，f 的奇点集维数不超过 $m-d(n)-1$。

5.4.4　稳定性不等式(5.17)式、(5.23)式和(5.34)式可以使我们研究到这类流形稳定调和映照的不存在性定理，这时出发流形可以是完备非紧流形。我们就不可约齐性空间为例进行具体的讨论，对其它两种情形，可进行类似的讨论，本书不再赘言，具体可参阅文献[130]、[134]。

对 Riemann 流形 M，如果它没有非常值的负的次调和函数，那末，M 称为*强抛物流形*，否则就称为*弱双曲流形*。这是 Karp[71] 所引入的。它们是 Riemann 面中相应分类在高维情形的推广。当 $n\geqslant 3$ 时，R^n 不是强抛物流形。其实，并不是维数起作用，重要的是体积增长速度。Karp 还对完备非紧流形引入如下的体积慢增长流形：

设 $\mathscr{F}=\{F:(0,\ \infty)\to(0,\ \infty)$，$F$ 在 $(0,\ \infty)$ 上是单调增加函数，并且

$$\int_1^\infty\frac{dr}{rF(r)}=+\infty\Big\},$$

如果对某点 $x_0\in M$，$B_r(x_0)$ 表示以 x_0 为中心，r 为半径的测地球，如果

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{r^2F(r)}\operatorname{vol}B_r(x_0)<\infty,$$

那末，M称为体积慢增长流形。他还证明了，体积慢增长流形一定是强抛物流形。

我们有下列结果。

定理 5.18 设M是紧致或完备非紧、但体积慢增长流形，G/H是n维紧致不可约齐性空间，并且$\lambda<\frac{2s}{n}$，λ是G/H上Laplace算子的第一特征值，s是它的数量曲率。那末，任何稳定调和映照$\phi: M\to G/H$一定是常值映照。

证明 如果M是紧致流形(无边)，在(5.23)式中令$u\equiv 1$，立即得到ϕ是常值映照。这就是文献[57]和[82]中的结果。当G/H是紧不可约对称空间时，如§1.4所述，满足$\lambda<\frac{2s}{n}$的空间可以具体列出。

如果M完备非紧，我们考虑$D\subset M$上的强椭圆算子

$$L=\Delta+\frac{1}{n^2}(2s-n\lambda)|d\phi|^2,$$

这里$\bar{D}$是M上紧集。设μ是L在D中具Dirichlet边界条件的第一特征值。从(5.23)式即得

$$\mu=\inf\frac{\int_D -uLu*1}{\int_D u^2*1}$$

$$=\inf\frac{\int_D\left(-u\Delta u-\frac{1}{n^2}(2s-n\lambda)|d\phi|^2\right)*1}{\int_D u^2*1}\geqslant 0.$$

由文献[35]中的定理，$Lu=0$有正解$u>0$，即，在M上有

$$\Delta u=-\frac{1}{n^2}(2s-n\lambda)|d\phi|^2u\leqslant 0,$$

这意味着$-u$是M上的负的次调和函数。由M具慢体积增长的假设，u为常数，所以$|d\phi|\equiv 0$，ϕ为常值映照。

下面，对能量密度作 L^p 估计，可进一步改进上述结果。

定理 5.19 设M是m维完备 Riemann 流形，它的 Ricci 曲率以非正常数$-A$为下界；设G/H是n维、紧致、不可约齐性空间，它的截曲率以正常数k为上界，并且$\lambda<\frac{2s}{n}$；设$\phi: M\to G/H$是稳定调和映照并且它的秩数

$$\operatorname{rank}\phi\leqslant r\leqslant\frac{n^2k}{n^2k-(2s-\lambda)}.$$

那末，对任何在M中具有紧致支集的非负函数u，下列不等式成立：

$$\int_M |d\phi|^4u^4*1\leqslant C\int_M (A^2u^4+|\nabla u|^4)*1, \tag{5.36}$$

其中C是只依赖于n, m, s和λ的常数。

证明 在(5.23)式中取$u=|d\phi|v$（这里v是M上具紧致支集的函数），得到

$$\frac{1}{n^2}(2s-n\lambda)\int_M |d\phi|^4v^2*1\leqslant\int_M [v^2|\nabla|d\phi||^2 + |d\phi|^2|\nabla v|^2+2v|d\phi|\langle\nabla v, \nabla|d\phi|\rangle]*1. \tag{5.37}$$

在能量密度的 Bochner 型公式(1.50)中，考虑到M和G/H的曲率条件以及映照f的秩数，我们有

$$\frac{1}{2}\Delta|d\phi|^2\geqslant|\nabla d\phi|^2-A|d\phi|^2-\frac{r-1}{r}k|d\phi|^4,$$

这样，

$$|d\phi|\Delta|d\phi|\geqslant|\nabla d\phi|^2-|\nabla|d\phi||^2-A|d\phi|^2-\frac{r-1}{r}k|d\phi|^4,$$

按文献[102]中的计算

$$|\nabla d\phi|^2-|\nabla|d\phi||^2\geqslant\frac{1}{2mn}|\nabla|d\phi||^2,$$

代入上式，得到

$$|d\phi|\Delta|d\phi|\geqslant\frac{1}{2mn}|\nabla|d\phi||^2-A|d\phi|^2-\frac{r-1}{r}k|d\phi|^4. \tag{5.38}$$

用 v^2 通乘(5.38)式并在 M 上积分，得到

$$\frac{1}{2mn}\int_M v^2|\nabla|d\phi||^2*1\leqslant-\int_M v^2|\nabla|d\phi||^2*1$$

$$+\int_M A|d\phi|^2v^2*1+\int_M\frac{r-1}{r}k|d\phi|^4v^2$$

$$-2\int_M v|d\phi|\langle\nabla|d\phi|,\nabla v\rangle*1. \tag{5.39}$$

将(5.37)式和(5.39)式两边相加，得到

$$\frac{1}{2mn}\int_M v^2|\nabla|d\phi|^2*|\leqslant\int_M[|d\phi|^2|\nabla v|^2+A|d\phi|^2v^2]*1$$

$$+\left[\frac{r-1}{r}k-\frac{1}{n^2}(2s-n\lambda)\right]\int_M|d\phi|^4v^2*1$$

$$\leqslant\int_M[|d\phi|^2|\nabla v|^2+A|d\phi|^2v^2]*1. \tag{5.40}$$

由 Cauchy 不等式，对任何 $\varepsilon>0$,

$$2v|d\phi|\langle\nabla v,\nabla|d\phi|\rangle\leqslant\varepsilon v^2|\nabla|d\phi||^2+\varepsilon^{-1}|d\phi|^2|\nabla v|^2,$$

从而，(5.37)式化为

$$\frac{1}{n^2}(2s-n\lambda)\int_M|d\phi|^4v^2*1\leqslant(1+\varepsilon)\int_M v^2|\nabla|d\phi||^2*1$$

$$+(1+\varepsilon^{-1})\int_M|d\phi|^2|\nabla v|^2*1, \tag{5.41}$$

将(5.40)式代入(5.41)式，并用 u^2 代替 v，我们有

$$(2s-n\lambda)\int_M|d\phi|^4u^4*1\leqslant C_1\int_M(4|d\phi|^2u^2|\nabla u|^2$$

$$+A|d\phi|^2u^4)*1 \tag{5.42}$$

其中 C_1 是只依赖于 n 和 m 的常数。再用 Cauchy 不等式，对任何 $\varepsilon>0$,

$$|d\phi|^2u^2|\nabla u|^2\leqslant\frac{\varepsilon}{2}u^4|d\phi|^4+\frac{\varepsilon^{-1}}{2}|\nabla u|^4,$$

$$A|d\phi|^2\leqslant\frac{\varepsilon}{2}|d\phi|^4+\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}A^2.$$

将它们代入(5.42)式，就得到(5.36)式。 ∎

推论 5.20 设 M 是具非负 Ricci 曲率的完备流形，并且，当 $R\to\infty$ 时

$$\frac{\operatorname{vol} B_R(x_0)}{R^4} \to 0,$$

设 G/H 以及 $\phi: M \to G/H$ 和定理 5.18 一样，那末，ϕ 是常值映照。当 M 是 4 维欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 时，$\phi: \mathbb{R}^4 \to G/H$ 也是常值映照。

证明　(5.36)式现在化为

$$\int_M |d\phi|^4 u^4 * 1 \leqslant C \int_M |\nabla u|^4 * 1, \tag{5.43}$$

取截断函数

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in B_{R/2}(x_0) \\ 0, & \text{当 } x \in M/B_R(x_0), \end{cases}$$

并且 $|\nabla u| \leqslant \frac{C'}{R}$。那末，从(5.43)式得到

$$\int_{B_R(x_0)} |d\phi|^4 * 1 \leqslant C \int_M |\nabla u|^4 * 1 \leqslant \frac{C''}{R^4} \operatorname{vol} B_R(x_0) \to 0,$$

当 $R \to \infty$ 时，所以 ϕ 是常值映照。

当 $M = \mathbb{R}^4$ 时，取

$$u(x) = \begin{cases} 1 & , \text{当 } x \in B_R(0) \\ \dfrac{\log\left(\dfrac{R^2}{|x|}\right)}{\log R}, & \text{当 } R \leqslant |x| \leqslant R^2, \\ 0 & , \text{当 } x \in \mathbb{R}^4 \setminus B_{R^2}(0), \end{cases}$$

那末(5.43)式化为

$$\int_{B_R(0)} |d\phi|^4 * 1 \leqslant C(\log R)^{-3}.$$

令 $R \to \infty$，即可得到 $|d\phi| \equiv 0$。

第 6 章

等变调和映照

调和性方程是拟线性偏微分方程。为了得到调和映照的存在性定理，就要大范围求解偏微分方程。当象流形具非正截面曲率，或者象落在测地凸邻域中时，这种求解问题被偏微分方程方法所成功地解决[29]、[54]、[100]。但是，到正曲率流形的调和映照，如最简单的从球面到球面的调和映照，上述方法不能奏效。用热流法，解在有限时间就发生破裂 (blow-up)[23]、[27]、[18]。而这时的调和映照又是不稳定的[123]、[73]，因此，也不能用变分直接法。迄今，唯一有效的办法是充分利用流形的几何结构，而映照关于几何结构是等变的，这时可求调和性方程的特解。这个方法已获得了成功[112]、[91]、[26]、[34]、[117]、[135]、[136]、[137]。本章将系统介绍等变调和映照的最新进展。

§6.1 Riemann 浸没和等变映照

在极小子流形理论中，项武义和 Lawson 发展了一种"余齐性"方法[58]。后来，Palais 和滕楚莲在更一般的框架下来约化极小子流形方程[86]。现在，我们再推进一步，考虑关于 Riemann 浸没等变的映照。

设 E 和 M 是 Riemann 流形，π: $E\to M$ 是 Riemann 浸没。对任何一点 $p\in M$，纤维 $F=\pi^{-1}(p)$ 是 E 的正则子流形，它在 $x\in F$ 点的切空间和法空间记为 T_xF 和 N_xF。纤维子流形的切空间全体构成 E 上的垂直分布 $V=\ker(d\pi)$，而它们法空间的全体，则构成 E 上的水平分布 H，它是 V 的正交补。

如果对任何 $x\in E$，向量场 X 在 x 的取值 $X(x)\in H(x)$，则 X 称为水平向量场。对 E 中的任一向量场 X，如果存在 M 中的向量场 $\overline{X}$，满足 $\pi_*X(x)=\overline{X}(\pi(x))$，那末，$X$ 称为可投影向量场。既是水平又是可投影的向量场称为基本向量场。对 M 中的任一向量场 $\overline{X}$，总存在 E 中唯一的向量场 X，使 $\pi_*X=\overline{X}$，称之谓 $\overline{X}$ 的水平提升。

设 $\pi_1: E_1\to M_1$，$\pi_2: E_2\to M_2$ 都是 Riemann 浸没，$f: E_1\to E_2$ 是光滑映照。如果 f 是保持纤维子流形不变的映照，那末，f 称为关于 π_1，π_2 等变的映照。具体地说，如果 x_1 和 x_1' 是同一纤维上的二点：$\pi_1(x_1)=\pi_1(x_1')$，那末，它们的象 $f(x_1)$ 和 $f(x_1')$ 也在 E_2 的同一纤维上，即 $\pi_2(f(x_1))=\pi_2(f(x_1'))$。

等变映照 f 诱导了底流形之间的映照 $\bar{f}$ 如下：对任何 $p_1\in M_1$，任取 $x_1\in\pi_1^{-1}(p_1)$，定义 $p_2=\pi_2(f(x_1))\xlongequal{\text{def}}\bar{f}(p_1)$。因 f 是等变映照，那末，$\bar{f}$ 是有意义的，即与 x_1 的选取无关。我们有下列交换图

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \pi_1\downarrow & & \downarrow\pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{\bar{f}} & M_2 \end{array}$$

对光滑映照 $f: E_1\to E_2$，如果 f_* 将 E_1 中的水平向量场映照成 E_2 中的水平向量场，则 f 称为水平映照。

例1　设 $r: M\to R$ 是 Riemann 流形 M 上的光滑函数，如果存在 $f(M)$ 上的光滑函数 a 和连续函数 b，使

$$|dr|^2=a\circ r,\quad \Delta r=b\circ r,$$

那末，r 称为 M 上的等参函数。如果 $dr\neq 0$，即 grad $r\neq 0$。函数 $r: M\to r(M)\subset R$ 可看成浸没，它的纤维超曲面是等参超曲面 $M_c=r^{-1}(c)$，grad r 是它的水平分布。如果 grad r 是单位向量，就称为单位速度等参函数。这样的 r 就是 Riemann 浸没。所以，关于单位速度等参函数的等变映照是我们所定义水平等变映照的特例。关于等参函数的理论，有兴趣的读者请参阅文献[25]第3

章。

例 2 等参函数可推广成等参映照。按文献[118]定义如下：非常值映照 $f:M\to R^n$ 称为*等参映照*，如果 f 满足：

$$\langle df_i,\ df_j\rangle = a_{ij}(f_1,\ \cdots,\ f_n), \tag{6.1}$$

$$\Delta f_i = b_i(f_1,\ \cdots,\ f_n),\quad i,\ j=1,\ \cdots,\ n, \tag{6.2}$$

其中 a_{ij} 是 $f(M)$ 上光滑实函数，b_i 是 $f(M)$ 上的连续函数。

显然，f 的秩数在纤维上是常数。设 $r=\max\limits_{x\in M}(\operatorname{rank} f)$。具极大秩数的纤维称为*正则纤维*，它们构成$M$的一个开子集 M^0，称为M的*正则部分*，r 称为 f 的*秩数*；而 $M\backslash M^0$ 称为 f 的*奇异部分*，它是闭的零测度集。

命题 6.1[118] 设 $f:M\to R^n$ 是秩为 r 的等参映照。那末，$N^0=f(M^0)$ 是 R^n 的 r 维子流形，在 N^0 上存在唯一的 Riemann 度量 ds_f^2，使 $f|_{M^0}:M^0\to N^0$ 是 Riemann 浸没；而正则纤维的平均曲率向量H是 M^0 中的基本向量场。

证明 对任何 $y\in N^0$，取 $x\in f^{-1}(y)$，那末，T_xM^0 的水平子空间由 $\{\operatorname{grad} f_i\}$ 所张成。从(6.1)式可见 $\operatorname{rank}(a_{ij})=r$。不失一般性，假设 $(\operatorname{grad} f_1,\ \cdots,\ \operatorname{grad} f_r)$ 在 x 附近任一点是线性独立的。设(x^α)是 x 附近的局部坐标，(y^s) 是 y 附近的局部坐标。那末 $\operatorname{grad}\ f_s$ 的局部表达式为 $g^{\alpha\beta}\dfrac{\partial f^s}{\partial x^\alpha}\dfrac{\partial}{\partial x^\beta}$，其中 $g^{\alpha\beta}$ 是 M^0 中度量张量的逆阵。设(a^{st})是(a_{st})的逆阵，如果 $f|_{M^0}$ 是 Riemann 浸没，那末，$f_*(\operatorname{grad} f_s)=g^{\alpha\beta}\dfrac{\partial f^s}{\partial x^\alpha}\dfrac{\partial f^t}{\partial x^\beta}\dfrac{\partial}{\partial y^t}$ 的长度必须是 a_{ss}，所以$\left\langle\dfrac{\partial}{\partial y^s},\ \dfrac{\partial}{\partial y^t}\right\rangle=a^{st}$。这样局部定义的内积显然组成 N^0 的一个 Riemann 度量 ds_f^2。

设$\{\bar{e}_s\}$是 N^0 中的局部幺正标架场，它的水平提升是 $\{e_s\}$，设$\{e_a\}$是 M^0 的纤维子流形F上的局部幺正标架场。从式(6.1)可见 $\operatorname{grad} f_i$ 是基本向量场，因此

$$e_s = c_{st}\ \operatorname{grad} f_t,$$

其中 c_{st} 在任一纤维上是常数。纤维子流形 $F\subset M^0$ 的平均曲率向量为

$$
\begin{aligned}
H &= -\langle\nabla_{e_a}e_s,\ e_a\rangle e_s\\
&= -c_{st}\langle\nabla_{e_a}\operatorname{grad} f_t,\ e_a\rangle e_s\\
&= -c_{st}(\Delta f_t)e_s + c_{st}\langle\nabla_{e_r}\operatorname{grad} f_t,\ e_r\rangle e_s,
\end{aligned}
$$

根据 Riemann 浸没的性质 $\mathscr{H}\nabla_{e_r}\operatorname{grad} f_t$ 是基本向量场，所以 $\langle\nabla_{e_r}\operatorname{grad} f_t,\ e_r\rangle$ 在任一纤维上是常数；又考虑到(6.2)式，因此，H 是基本向量场。

我们以后将具体给出等参映照，并构造关于等参映照等变的调和映照。

例 3　设 M_1 和 M_2 是 Riemann 流形，G_1 和 G_2 是紧致李群，它们分别以等距作用于 M_1 及 M_2。设 $\varphi: G_1\to G_2$ 是同态，$f: M_1\to M_2$ 是光滑映照。Smith[30] 定义了下列等变映照：如果对任何 $g_1\in G_1$，$p_1\in M_1$，成立

$$f(g_1p_1)=\varphi(g_1)f(p_1),$$

那末，f 称为关于同态 φ 的等变映照。

对任何 $p_1\in M_1$，设 G_{p_1} 是 G_1 在 p_1 的迷向子群，$G_1(p_1)$ 是 p_1 在 G_1 作用下的轨道，它是齐性空间 $G_1(p_1)\approx G_1/G_{p_1}$。二个轨道 $G_1(p_1)$ 和 $G_1(p_1')$，如果 G_{p_1} 和 $G_{p_1'}$ 在 G_1 中共轭，就称为同类型的。子群 $\{G_{p_1},\ p_1\in M_1\}$ 的共轭类则称为轨道型。总是存在主轨道型 (H)，它的所有轨道的并构成一个开稠密子集，并且成一流形 $M_1^*=\{p_1\in M_1,\ G_{p_1}\in(H)\}$[79]。显然有自然投影 $\pi_1: M_1^*\to M_1^*/G_1$。在 M_1^*/G_1 上可自然地定义一个 Riemann 度量，使 π_1 是 Riemann 浸没。它的纤维子流形是在 G_1 作用下 M_1^* 的轨道，同样有 M_2^* 和 π_2。如果 $f: M_1\to M_2$ 关于同态 $\varphi: G_1\to G_2$ 是等变映照，并将主轨道型变到主轨道型，那末，f 显然是关于 Riemann 浸没 π_1 和 π_2 的等变映照。

特别地，我们考虑关于 Riemann 浸没 $\pi: E\to M$ 的等变函数 $f: E\to R$，则它诱导了底流形 M 上的函数 $\bar f$。

设 $\{\bar e_i\}$ 是 M 上的局部幺正标架场，e_i 是 $\bar e_i$ 的水平提升。设

$\{e_a\}$是垂直幺正标架场。那末，$\{e_i, e_a\}$构成E中的幺正标架场。显然$f_*e_a=0$，$f_*e_i=\bar{f}_*\pi_*e_i=\bar{f}_*\bar{e}_i$。因此，有

$$|df|^2=\langle \bar{f}_*\bar{e}_i, \bar{f}_*\bar{e}_i\rangle=|d\bar{f}|^2\circ\pi. \tag{6.3}$$

另一方面

$$e_i(f)=f_*e_i=\bar{f}_*\bar{e}_i=\bar{e}_i(\bar{f})\circ\pi,$$
$$e_ie_i(f)=\bar{e}_i\bar{e}_i(\bar{f})\circ\pi,$$
$$(\nabla_{e_a}e_a)^T(f)=0,$$
$$(\nabla_{e_a}e_a)^N(f)=H(f),$$

其中H是纤维子流形的平均曲率向量，它是水平向量场. 又考虑到

$$(\nabla_{e_i}e_i)(f)=f_*\nabla_{e_i}e_i=\bar{f}_*\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_i=(\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_i)\bar{f},$$

我们得到

$$\Delta f=(\bar{\Delta}\bar{f})\circ\pi-H(f), \tag{6.4}$$

其中$\bar{\Delta}$表示底流形M上的 Laplace 算子。我们这就得到下列命题。

命题 6.2 设π: $E\to M$是具有极小纤维子流形的 Riemann 浸没，那末，f是E上等变等参函数的充要条件为它在底流形M上的诱导函数是等参函数。特别地，f是$S^{2n+1}(S^{4n+3})$上关于$S^1(S^3)$作用等变的等参函数的充要条件为$\bar{f}$是$CP^n(QP^n)$上的等参函数。

我们将利用命题6.2来构造射影空间之间的调和映照。

§6.2 约化定理

本节将给出关于 Riemann 浸没等变调和映照的约化定理，它们概括并推广了过去一些特殊情形下的约化定理.

定理 6.3[135] 设π_1: $E_1\to M_1$和π_2: $E_2\to M_2$是 Riemann 浸没，H_1是纤维子流形F_1在E_1中的平均曲率向量，B_2是纤维子流形F_2在E_2中的第二基本形式。设f: $E_1\to E_2$是水平等变映照，$\bar{f}$: $M_1\to M_2$是诱导映照，$f^\perp$表示f在纤维F_1上的限制。那末，f

是调到映照，当且仅当 $f^{\perp}$ 是调和映照，并且下列条件成立：

$$\tau^*(\bar{f})+B_2(f_*e_t,\ f_*e_t)-f_*H_1=0, \tag{6.5}$$

其中 $\{e_t\}$ $(t_1=m_1+1,\ \cdots,\ n_1)$ 是纤维 F_1 上的局部幺正标架场，$\tau^*(\bar{f})$ 表示 $\tau(\bar{f})$ 的水平提升。

注　(6.5)式左端是 E_2 中的水平向量场。如果它是基本向量场，那末(6.5)式的确是约化方程。

纤维子流形 F_2 在 E_2 中的第二基本形式 B_2 是向量丛 $\odot^2TF_2\otimes NF_2$ 上的截面。定义 $f^*B_2\in\Gamma(\odot^2TF_1\otimes NF_2)$ 如下：对任何 $U,\ V\in TF_1$

$$f^*B_2(U,\ V)=B_2(f_*U,\ f_*V).$$

那末

$$B_2(f_*e_t,\ f_*e_t)=\text{trace}\ f^*B_2\in\Gamma(NF_2),$$

特别地，如果它是 E_2 中基本向量场，而且 H_1 也是 E_1 中的基本向量场，那末，(6.5)式是约化方程。

证明　取 M_1 中局部幺正标架场 $\{\bar{e}_i\}$，它在 E_1 中的水平提升为 $\{e_i\}$。设 $\{e_t\}$ 是 E_1 中纤维子流形的局部幺正标架场，那末，$\{e_i,\ e_t\}$ 构成 E_1 中的局部幺正标架场。

注意到 f_*e_i 是 E_2 中的基本向量场，它在 M_2 中的投影是 $\bar{f}^*\bar{e}_i$。设 v_2 是 E_2 中的垂直向量场，那末

$$\langle\nabla_{v_2}f_*e_i,\ f_*e_i\rangle=0, \tag{6.6}$$

而

$$[v_2,\ f_*e_i]=\nabla_{v_2}f_*e_i-\nabla_{f_*e_i}v_2 \tag{6.7}$$

是垂直向量场。(6.6)式和(6.7)式意味着

$$\langle\nabla_{f_*e_i}f_*e_i,\ v_2\rangle=0, \tag{6.8}$$

即 $\nabla_{f_*e_i}f_*e_i$ 是水平向量场；同理，$\nabla_{e_i}e_i$ 也是水平向量场。它们的投影分别是 $\nabla_{\bar{f}_*\bar{e}_i}\bar{f}_*\bar{e}_i$ 及 $\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_i$，因为 π_1 和 π_2 都是 Riemann浸没，所以

$$\pi_{2*}(\nabla_{f_*e_i}f_*e_i-f_*\nabla_{e_i}e_i)=\nabla_{\bar{f}_*\bar{e}_i}\bar{f}_*\bar{e}_i-\bar{f}_*\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_i=\tau(\bar{f}). \tag{6.9}$$

令

$$\tau^*(\bar{f})=\nabla_{f_*e_i}f_*e_i-f_*\nabla_{e_i}e_i,$$

它是$\tau(\bar{f})$在E_2中的水平提升。我们来计算映照f的张力场。

$$\begin{aligned}\tau(f) &= (\nabla_{e_i} df) e_i + (\nabla_{e_t} df) e_t \\ &= \nabla_{f_* e_i} f_* e_i - f_*(\nabla_{e_i} e_i) + (\nabla_{f_* e_t} f_* e_t)^H \\ &\quad + (\nabla_{f_* e_t} f_* e_t)^V - f_*(\nabla_{e_t} e_t)^H - f_*(\nabla_{e_t} e_t)^V \\ &= \tau^*(\bar{f}) + B_2(f_* e_t,\ f_* e_t) - f_* H_1 + \tau(f^\perp) \qquad (6.10)\end{aligned}$$

如果f张力场的水平分量和垂直分量均为零，则f为调和映照。定理6.3立即从(6.10)式得到。

定理6.3的推论[5]　设r: $M\to\mathbb{R}$和R: $N\to\mathbb{R}$分别是M和N中单位速度的等参函数，f: $M\to N$是关于等参函数的水平等变映照，那末，f是调和映照的充要条件为

1) 在任一水平超曲面上的限制$f_r=f|_{M_r}$: $M_r\to N_{\alpha(r)}$是调和映照；

2) α作为r的函数满足下列关系

$$\alpha'' + (\Delta r)\alpha' - \mathrm{Hess}(R)(f_* e_t,\ f_* e_t) = 0. \qquad (6.11)$$

注　从等参函数的定义知Δr只依赖于r。如果$\mathrm{Hess}(R)(f_* e_t,\ f_* e_t)$只依赖于$r$和$\alpha$，那末，方程(6.11)变成常微分方程。

证明　设$v=\mathrm{grad}\, r$，$\tilde{v}=\mathrm{grad}\, R$。那末，我们有$f_* v=\lambda\tilde{v}$。但注意到

$$\begin{aligned}\lambda &= \alpha', \\ f_* H_1 &= f_*(\nabla_{e_t} e_t)^H \\ &= f_*(\langle\nabla_{e_t} e_t,\ v\rangle v) \\ &= -\langle\nabla_{e_t}\mathrm{grad}\, r,\ e_t\rangle f_* v \\ &= -(\Delta r)\alpha'\tilde{v}, \\ B_2(f_* e_t,\ f_* e_t) &= \langle\nabla_{f_* e_t} f_* e_t,\ \tilde{v}\rangle\tilde{v} \\ &= -\mathrm{Hess}(R)(f_* e_t,\ f_* e_t)\tilde{v},\end{aligned}$$

以及

$$\tau^*(\bar{f}) = \alpha''\tilde{v},$$

那末从定理6.3立即得到推论。

设G_1和G_2是紧致李群，均具有双不变Riemann度量。设

$H_1\subset G_1$和$H_2\subset G_2$是闭子群，因而得到齐性空间G_1/H_1和G_2/H_2，均具有从G_1及G_2继承的Riemann度量，并使π_1: $G_1\to G_1/H_1$以及π_2: $G_2\to G_2/H_2$是具有全测地纤维的Riemann浸没。如果ϕ: $G_1\to G_2$是同态并使$\phi(H_1)\subset H_2$，那末ϕ是从G_1到G_2的等变映照，并且关于双不变度量是调和的。对诱导映照$\bar{\phi}$: $G_1/H_1\to G_2/H_2$，在文献[48]中给出了它为调和的充要条件。下面，我们给出它调和性的另一充分条件。为此，先证明下列定理。

定理6.4[135]　设π_1: $E_1\to M_1$和π_2: $E_2\to M_2$都是具全测地纤维的Riemann浸没，并且E_2中的水平分布是可积的。如果f: $E_1\to E_2$是等变调和映照，那末，它诱导了调和映照$\bar{f}$: $M_1\to M_2$。

证明　在E_1中选取和定理6.3中同样的局部幺正标架场$\{e_i, e_t\}$。注意到$\nabla_{e_i}e_i$是基本向量场，它的投影为$\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_i$。$f$的张力场可以写为

$$
\begin{aligned}
\tau(f) = {} & (\nabla_{e_i}df)e_i + (\nabla_{e_t}df)e_t \\
= {} & (\nabla_{(f_*e_i)^H}(f_*e_i)^H - \nabla_{(f_*e_i)^V}(f_*e_i)^V \\
& + \nabla_{(f_*e_i)^H}(f_*e_i)^V + \nabla_{(f_*e_i)^V}(f_*e_i)^H \\
& + (\nabla_{f_*e_t}f_*e_t)^H + (\nabla_{f_*e_t}f_*e_t)^V \\
& - (f_*\nabla_{e_i}e_i)^H - (f_*\nabla_{e_i}e_i)^V \\
& - f_*(\nabla_{e_t}e_t)^H - f_*(\nabla_{e_t}e_t)^V.
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

$(f_*e_i)^H$显然是基本向量场，并从定理6.3的证明可见$\nabla_{(f_*e_i)^H}(f_*e_i)^H$是基本向量场，它的投影为$\nabla_{\bar{f}_*\bar{e}_i}\bar{f}_*\bar{e}_i$，同样$(f_*\nabla_{e_i}e_i)^H$是投影为$\bar{f}_*(\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_i)$的基本向量场。考虑到纤维是全测地的，因此有

$$
\nabla_{(f_*e_i)^V}(f_*e_i)^V = (\nabla_{(f_*e_i)^V}(f_*e_i)^V)^V,
$$

$$
\begin{aligned}
& \nabla_{(f_*e_i)^H}(f_*e_i)^V + \nabla_{(f_*e_i)^V}(f_*e_i)^H \\
= {} & 2(\nabla_{(f_*e_i)^V}(f_*e_i)^H)^H + [(f_*e_i)^H, (f_*e_i)^V]^V,
\end{aligned}
$$

$$
(\nabla_{f_*e_t}f_*e_t)^H = 0,
$$

$$
(\nabla_{e_t}e_t)^H = 0.
$$

将它们代入(6.12)式得到

$$\begin{aligned}\tau(f) = \tau^*(\bar{f}) + \tau(f^{\perp}) + (\nabla_{(f_*e_i)^V}(f_*e_i)^V)^V \\ + [(f_*e_i)^H, (f_*e_i)^V]^V \\ + 2(\nabla_{(f_*e_i)^V}(f_*e_i)^H)^H - (f_*\nabla_{e_i}e_i)^V.\end{aligned} \tag{6.13}$$

从 f 的调和性及(6.13)式知

$$\tau^*(\bar{f}) + 2(\nabla_{(f_*e_i)^V}(f_*e_i)^H)^H = 0.$$

对 E_2 中任一基本向量场 Z，利用 Levi-Civita 联络，用 Riemann 度量及李括号表出的公式，我们有

$$\langle(\nabla_{(f_*e_i)^V}(f_*e_i)^H)^H, Z\rangle = -\frac{1}{2}\langle(f_*e_i)^V, [(f_*e_i)^H, Z]\rangle = 0.$$

这就完成的定理的证明。

定理 6.4 的推论 设 G_1 和 G_2 是紧致李群，H_1 和 H_2 是对应闭子群。设 ϕ: $G_1 \to G_2$ 是满足 $\phi(H_1) \subset H_2$ 的同态，那末，齐性空间之间的诱导映照 $\bar{\phi}$: $G_1/H_1 \to G_2/H_2$ 是调和的，只要 π_2: $G_2 \to G_2/H_2$ 的水平分布是可积的。

在§6.1 中例 3 描述了在群作用下的等变映照。利用上述定理 6.4 的推论和定理 6.3 就可得到这种水平等变映照的调和性条件。

例 4 在下列交换图中

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \pi_1\downarrow & & \downarrow\pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{\bar{f}} & M_2 \end{array}$$

如果 f 是等距浸入，并且纤维子流形 F_1 和 F_2 有相同维数。那末，f 在 F_1 上的限制 $f^{\perp}$ 是局部等距，因而是调和映照，显然 f 是水平映照。现在，我们有 $B_2(f_*e_t, f_*e_t) = H_2$，它为 F_2 在 E_2 中的平均曲率向量。当 E_1 等距浸入到 E_2 中时，H_2 也可看成 F_1 在 E_2 中的平均曲率向量，而 f_*H_1 表示 F_1 在 E_1 中的平均曲率向量。设 P 表示 TE_2 在 NE_1 上的投影，那末，(6.5)式可写为

$$\tau^*(\bar{f}) + P(H_2) = 0. \tag{6.14}$$

这就是在文献[86]中的约化方程。

§6.3　等变变分公式

这一节，我们来推导等变变分公式。

定理6.5[135]　设 $f: E_1 \to E_2$ 是关于相应 Riemann 浸没的等变映照。如果它的张力场 $\tau(f)$ 是 E_2 中的基本向量场，那末，f 是调和映照的充要条件为它是能量积分关于所有等变变分的临界点。

证明　只要证明充分性。取变分映照，使对应的变分向量场是 $(h\circ f)\tau(f)$：

$$f_t(p) = \exp_{f(p)}(t\ h(f(p))\tau(f)),$$

其中 h 是 E_2 上任一具紧致支集的等变函数。显然可见，底流形 M_2 中从任一点 $\bar{p}_2$ 出发并与 $\bar{u}_2 \in T_{\bar{p}_2}M_2$ 相切的测地线水平提升到 p_2 的曲线必是从 p_2 出发并与 u_2 相切的 E_2 中的测地线，其中 $\pi_{2*}u_2 = \bar{u}_2$。因此，

$$\pi_2\circ f_t(p) = \exp_{\pi_2\circ f(p)}(\pi_{2*}t\ h(f(p))\tau(f)).$$

若记 $\pi_{2*}(\tau(f)) = \bar{\tau}(f)$，则得

$$\pi_2\circ f_t(p) = \exp_{\bar{f}(\pi_1(p))}(t\ h\circ\bar{f}(\pi_1(p))\bar{\tau}(f)(\pi_1(p))),$$

这说明 f_t 是给定映照 f 的等变变分。根据第一变分公式，

$$\frac{d}{dt}E(f_t)\Big|_{t=0} = -\int_{E_1}\langle h\circ f\tau(f),\ \tau(f)\rangle *1$$
$$= -\int_{E_1} h\circ f|\tau(f)|^2 *1.$$

根据定理假设上式为零，这迫使 $\tau(f)\equiv 0$。 ▮

对一个水平等变映照，是否存在水平等变变分呢？设 $\bar{v}$ 是 M_2 中沿着 $\bar{f}$ 的向量场，v 是它的水平提升。那末，当 t 充分小时 $f_t(p) = \exp_{f(p)}tv$ 是映照 f 的等变变分。我们来说明它们同时是水平映照。事实上，对任一水平向量 $u\in H_1(p)$

$$f_{t*}u = \frac{df_t(c(s))}{ds}\Big|_{s=0},$$

其中 $c(s)\subset E_1$，$c(0) = p$ 并且 $c'(0) = u$。它是沿着水平测地线

$f_t(p)$ 的 Jacobi 场。

关于浸没的对应点建立规范局部坐标，然后考察 Jacobi 方程的水平部分和垂直部分可以断言：底流形上的 Jacobi 场的水平提升恰好为全空间 Jacobi 方程关于水平初始条件的解。在我们现在情形下，

$$\gamma' = \frac{d}{dt} f_t(c(s))\bigg|_{s=0}, \quad J = \frac{d}{ds} f_t(c(s))\bigg|_{s=0},$$

并且 γ' 和 $J(0) = f_* u$ 均为水平向量。考虑到公式[85]

$$\nabla_X Y = (\nabla_X Y)^H + \frac{1}{2}[X, Y]^V,$$

其中 X, Y 都是水平向量，我们知道

$$\nabla_{\gamma'(0)} J = \nabla_{J(0)} \gamma',$$

也是水平向量。综合上面讨论，我们有下面的命题。

命题 6.6 对任一等变水平映照 $f: E_1 \to E_2$ 总存在具有基本变分向量场的水平等变变分。

现在，我们给出等变第一变分公式。

定理 6.7 设 $\pi_1: E_1 \to M_1$ 是 Riemann 浸没，它的纤维子流形 F_1 是紧致的并且平均曲率向量 H_1 是基本向量场；设 $\pi_2: E_2 \to M_2$ 也是一 Riemann 浸没，它的纤维子流形 F_2 的第二基本形式是 B_2。设 $f: E_1 \to E_2$ 是关于 π_1 和 π_2 的水平等变映照。假定 $\mathrm{trace}(f^* B_2)$ 是 E_2 中的基本向量场。那末，对任何等变水平变分 $f_t: E_1 \to E_2$，若它的变分向量场 $w = \dfrac{\partial f_t}{\partial t}\bigg|_{t=0}$ 是具紧致支集的基本向量场，则成立下式：

$$\frac{d}{dt} E(f_t)\bigg|_{t=0} = -\int_{M_1} v\langle \tau(\bar{f}) + \bar{f}_* \operatorname{grad}(\log v) + B(f_* e_s, f_* e_s), \bar{w}\rangle * 1, \qquad (6.15)$$

其中 v 是由 F_1 在 E_1 中体积所定义的 M_1 上的函数，$\bar{w}$ 是 w 在 M_2 上的投影。

证明 选取 M_1 上的局部幺正标架场 $\{\bar{e}_i\}$，满足 $\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_j|_{\bar{p}} = 0$，它在 E_1 中的水平提升为 $\{e_i\}$，并取纤维子流形 F_1 上的幺正标架

场$\{e_s\}$，那末，$\{e_i, e_s\}$构成E_1中的局部幺正标架场。我们有

$$|df_t|^2=\langle \bar f_{t*}\bar e_i,\ \bar f_{t*}\bar e_i\rangle+\langle f_{t*}e_s,\ f_{t*}e_s\rangle.$$

从 Riemann 浸没的性质，得到

$$\frac{d}{dt}E(f_t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{M_1}\langle \bar f_{t*}\bar e_i,\ \bar f_{t*}\bar e_i\rangle v*1+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{E_1}\langle f_{t*}e_s,\ f_{t*}e_s\rangle*1, \tag{6.16}$$

其中v是M_1上的函数，它由纤维F_1的体积所定义。对(6.16)式右端第一项，计算得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(\langle \bar f_{t*}\bar e_i,\ \bar f_{t*}\bar e_i\rangle v)&=\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\bar f_{t*}\bar e_i,\ \bar f_{t*}\bar e_i\rangle v\\
&=\langle(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}d\bar f_t)\bar e_i,\ \bar f_{t*}\bar e_i\rangle v\\
&=\left\langle(\nabla_{\bar e_i}d\bar f_t)\frac{\partial}{\partial t},\ \bar f_{t*}\bar e_i\right\rangle v\\
&=\nabla_{\bar e_i}\left\langle \bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t},\ v\bar f_{t*}\bar e_i\right\rangle-\left\langle \bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t},\ \nabla_{\bar e_i}v\bar f_{t*}\bar e_i\right\rangle\\
&=\nabla_{\bar e_i}\left\langle \bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t},\ v\bar f_{t*}\bar e_i\right\rangle-\left\langle \bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t},\ \nabla_{\bar e_i}(vd\bar f_t)\bar e_i\right\rangle\\
&=\nabla_{\bar e_i}\left\langle \bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t},\ v\bar f_{t*}\bar e_i\right\rangle-\left\langle \bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t},\ \bar f_{t*}\operatorname{grad}v\right\rangle\\
&\quad-\left\langle \bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t},\ \tau(\bar f_t)\right\rangle v.\end{aligned} \tag{6.17}$$

根据 Green 公式，上式中第一项积分为零，这就得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{M_1}\langle \bar f_{t*}\bar e_i,\ \bar f_{t*}\bar e_i\rangle v*1\\
&=-\int_{M_1}\left\langle \bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t},\ v\tau(\bar f_t)+\bar f_{t*}\operatorname{grad}v\right\rangle*1.\end{aligned} \tag{6.18}$$

而对(6.16)式右端的第二项，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\langle f_{t*}e_s,\ f_{t*}e_s\rangle\Big|_{t=0}&=\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}f_{t*}e_s,\ f_{t*}e_s\rangle\Big|_{t=0}\\
&=\nabla_{e_s}\left\langle f_{t*}\frac{\partial}{\partial t},\ f_{t*}e_s\right\rangle\Big|_{t=0}-\left\langle f_{t*}\frac{\partial}{\partial t},\ \nabla_{e_s}f_{t*}e_s\right\rangle\Big|_{t=0}\\
&=\nabla_{e_s}\langle w,\ f_*e_s\rangle-\langle w,\ \nabla_{e_s}f_{t*}e_s\rangle\big|_{t=0}\end{aligned}$$

$$= -\langle w, B(f_*e_i, f_*e_i)\rangle. \tag{6.19}$$

它只依赖于底流形 M_1。将(6.18)式和(6.19)式代入(6.16)式即得要证明的(6.15)式。

下面，再来计算等变第二变分公式。从(6.17)式得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{M_1}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(\langle \bar f_{t*}\bar e_i, \bar f_{t*}\bar e_i\rangle v)*1\\
&= -\int_{M_1}\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}, (\nabla_{\bar e_i}vd\bar f_t)\bar e_i\right\rangle*1\\
&\quad -\int_{M_1}\left\langle \bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(\nabla_{\bar e_i}(vd\bar f_t)\bar e_i)\right\rangle*1\\
&= -\int_{M_1}\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}, (\nabla_{\bar e_i}vd\bar f_t)\bar e_i\right\rangle*1\\
&\quad -\int_{M_1}\left\langle \bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}, (\nabla_{\bar e_i}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}vd\bar f_t)\bar e_i\right\rangle*1\\
&\quad -\int_{M_1}\left\langle \bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}, vR^{M_2}\left(\bar f_{t*}\bar e_i, \bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}\right)\bar f_{t*}\bar e_i\right\rangle*1.
\end{aligned} \tag{6.20}$$

注意到

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\bar e_i}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(vd\bar f_t))\bar e_i &= \nabla_{\bar e_i}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}v\bar f_{t*}\bar e_i\\
&= \nabla_{\bar e_i}v(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}d\bar f_t)\bar e_i\\
&= \nabla_{\bar e_i}v(\nabla_{\bar e_i}d\bar f_t)\frac{\partial}{\partial t}\\
&= \nabla_{\bar e_i}v\nabla_{\bar e_i}d\bar f_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\\
&= v\nabla^2\bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t} + \nabla_{\operatorname{grad} v}\bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t},
\end{aligned}$$

则(6.20)式化为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{M_1}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(\langle \bar f_{t*}\bar e_i, \bar f_{t*}\bar e_i\rangle v)*1\\
&= -\int_{M_1}\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}, (\nabla_{\bar e_i}vd\bar f_t)\bar e_i\rangle*1\\
&\quad -\int_{M_1}\left\langle v\nabla^2\bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t} + vR^{M_2}\left(\bar f_{t*}\bar e_i, \bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}\right)\bar f_{t*}\bar e_i\right.\\
&\quad \left. + \nabla_{\operatorname{grad} v}\bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}, \bar f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle*1.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

而从(6.19)式，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\langle f_{t*}e_s, f_{t*}e_s\rangle\\&=\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{e_s}\left\langle f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}, f_{t*}e_s\right\rangle-\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{e_s}f_{t*}e_s\right\rangle\\&-\left\langle f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{e_s}f_{t*}e_s\right\rangle.\end{aligned}\tag{6.22}$$

考虑到w是基本向量场，$\nabla_w w$ 也是基本向量场，

$$\begin{aligned}&\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{e_s}\left\langle f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}, f_{t*}e_s\right\rangle\Big|_{t=0}\\&=\nabla_{e_s}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\left\langle f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}, f_{t*}e_s\right\rangle\Big|_{t=0}\\&=\nabla_{e_s}\left(\left\langle\nabla_{f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}}f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}, f_{t*}e_s\right\rangle\right.\\&\quad\left.+\left\langle f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}}f_{t*}e_s\right\rangle\right)\Big|_{t=0}\\&=\nabla_{e_s}(\langle\nabla_w w, f_*e_s\rangle+\langle w, \nabla_{f_*e_s}w\rangle)\\&=\nabla_{e_s}(\langle\nabla_w w, f_*e_s\rangle+\frac{1}{2}\nabla_{f_*e_s}\langle w, w\rangle)=0,\end{aligned}\tag{6.23}$$

并且

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{e_s}f_{t*}e_s&=\left(\nabla_{e_s}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}df_t\right)e_s+R^{E_t}\left(f_{t*}e_s, f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}\right)f_{t*}e_s\\&=\nabla_{e_s}\nabla_{e_s}f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}+R^{E_t}\left(f_{t*}e_s, f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}\right)f_{t*}e_s.\end{aligned}\tag{6.24}$$

将(6.23)式和(6.24)式代入(6.22)式得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\langle f_{t*}e_s, f_{t*}e_s\rangle\Big|_{t=0}\\&=-\langle\nabla_w w, B(f_*e_s, f_*e_s)\rangle-\langle\nabla^H_{f_*e_s}\nabla^H_{f_*e_s}w, w\rangle\\&\quad+\langle B(f_*e_s, \varepsilon_\alpha), w\rangle\langle B(f_*e_s, \varepsilon_\alpha), w\rangle\\&\quad-\langle R^{E_t}(f_*e_s, w)f_*e_s, w\rangle.\end{aligned}\tag{6.25}$$

从(6.21)式和(6.25)式，我们得到了下列水平等变调和映照的第二变分公式。

定理 6.8

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2} E(f_t)\Big|_{t=0} \\
&= -\int_{M_1} \langle v\nabla^2\overline{w} + vR^{M_2}(\bar{f}_*\bar{e}_i, \overline{w})\bar{f}_*\bar{e}_i + \nabla_{\mathrm{grad}\,v}\overline{w}, \overline{w}\rangle *1 \\
&\quad -\int_{E_1} [\langle \nabla^H_{f_*e_s}\nabla^H_{f_*e_s} w, w\rangle + \langle R^{E_2}(f_*e_s, w)f_*e_s, w\rangle \\
&\quad - \langle B(f_*e_s, \varepsilon_\alpha), w\rangle\langle B(f_*e_s, \varepsilon_\alpha), w\rangle] *1. \qquad (6.26)
\end{aligned}
$$

我们可用公式(6.26)来定义等变稳定性。在很多情形，稳定调和映照只可能是常值映照。如球面 S^n，当 $n\geq 3$ 时，既不能作为稳定调和映照的始流形，也不可能成为象流形[123]、[73]。这些结果的证明是将 Laplace 算子第一特征函数的梯度向量应用于第二变分公式得到的。但这些特征函数并不是关于 Riemann 浸没的等变函数，所以这种证明并不适用于等变稳定性。这样看来，一个不稳定的调和映照，有可能是某类等变稳定调和映照。换言之，在某种等变映照的框架下，可应用变分直接法来找到新的调和映照。

§ 6.4　关于球同伦群的调和代表元

在 1975 年，Smith 利用球调和函数所定义的二个球到球调和映照的并(join)，将调和性方程化为常微分方程。藉助于方程的物理解释，他进而证明了常微分方程有解的充分性条件；据此得到了一大类球同伦群调和代表元的存在性[112]。十多年以后，Ratto 进一步分析了 Smith 的常微分方程，在他的博士论文中得到了方程有解的另一充分条件[92]，不久，在与他人合作的论文中得到了方程有解的充要条件[91]。这个充要条件也被丁伟岳用完全不同的并且更巧妙的方法所得到[26]。Smith 的构造给出了 $\pi_m(S^m)$，$m\leq 7$ 的调和代表元的存在性，而常微分方程问题的彻底解决只说明了这种构造的局限性。寻求 $\pi_m(S^m)$，$m\geq 8$ 时调和代表元的存在性问题是重要的，丘成桐和 Eells 等都将它作为重要而未解决

的问题公开提出来，见文献[144]的问题集中第112问题以及文献[31]中第二部分的问题1.16。为此，作者研究了这个问题，成功地构造了一个新的等变调和映照，从而给出了高维奇数维球的同伦群奇数类调和代表元存在性的肯定回答[137]。

Smith的构造可解释成关于等参函数不变的一类等变调和映照，因而可解释成关于Riemann浸没不变的水平等变调和映照。本节，我们首先用本章前2节所建立的理论框架导出由Smith构造的常微分方程，然后介绍这个方程的丁伟岳解法，以及Smith构造在球同伦群调和代表元问题中的应用。最后，给出作者在高维球同伦群调和代表元问题上的最新成果。

6.4.1 Smith构造的常微分方程

在球面 S^{m-1} 中可引进如下极坐标：设 $Z\in S^{m-1}$，它必可写为

$$Z=(X\sin s,\ Y\cos s),$$

其中 $X\in S^{p-1}$，$Y\in S^{q-1}$，$p+q=m$，$s\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$。显然可见，当 $s\neq 0,\ \frac{\pi}{2}$ 时，$|ds|^2=1$。这里 s 是 S^{m-1} 上的函数，记 ds 是它的梯度向量。我们来计算水平超曲面 M_s 的主曲率和主方向。对任何 $Z\in S^{m-1}$，存在 s 使 $Z\in M_s$，过 Z 作正交于 M_s 的测地线 γ，它交 S^{p-1} 于 Z_1，并交 S^{q-1} 于 Z_2。取 Z_1 附近 S^{p-1} 的幺正标架场 $\{e_i\}$，沿测地线 γ 平行移动到 Z 附近得到 $\left\{\frac{e_i}{\sin s}\right\}$，取 Z_2 附近 S^{q-1} 的幺正标架场 $\{e_a\}$，沿测地线 γ 平行移动到 Z 附近得到 $\left\{\frac{e_a}{\cos s}\right\}$，那末 $\left\{\frac{\partial}{\partial s},\ \frac{e_i}{\sin s},\ \frac{e_a}{\cos s}\right\}$ 组成 S^{m-1} 上 Z 附近的幺正标架场，并且 $\frac{\partial}{\partial s}$ 是 M_s 的单位法向。由直接计算可得

$$\nabla_{\frac{e_i}{\sin s}}\frac{\partial}{\partial s}=\operatorname{ctg} s\,\frac{e_i}{\sin s},$$

以及

$$\nabla_{\frac{e_a}{\cos s}}\frac{\partial}{\partial s}=-\operatorname{tg} s\,\frac{e_a}{\cos s}.$$

据此即得

$$\begin{aligned}\Delta s &= \operatorname{div} \operatorname{grad} s \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{e_i}{\sin s}} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{e_i}{\sin s} \right\rangle + \left\langle \nabla_{\frac{e_a}{\cos s}} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{e_a}{\cos s} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle \\ &= (p-1)\operatorname{ctg} s - (q-1)\operatorname{tg} s\end{aligned}$$

因此 s 为 $S^{m-1}\backslash S^{p-1}\cup S^{q-1}$ 上单位速度的等参函数，它的水平超曲面 M_s 以 $\operatorname{ctg} s$ 为 $p-1$ 重主曲率，以 $\operatorname{tg} s$ 为 $q-1$ 重主曲率。它的平均曲率量为

$$H = [(q-1)\operatorname{tg} s - (p-1)\operatorname{ctg} s]\frac{\partial}{\partial s}. \tag{6.27}$$

设 f_1: $S^{p-1}\to S^{\alpha-1}$ 是能量密度为常数 $\frac{\lambda_1}{2}$ 的调和映照，它由 k 次齐次调和多项式所定义，$\lambda_1 = k(k+p-2)$；f_2: $S^{q-1}\to S^{\beta-1}$ 是能量密度为常数 $\frac{\lambda_2}{2}$ 的调和映照，它由 l 次齐次调和多项式所定义，并且 $\lambda_2 = l(l+q-2)$。Smith 定义的映照是 f: $S^{m-1}\backslash S^{p-1}\cup S^{q-1}\to S^{n-1}\backslash S^{\alpha-1}\cup S^{\beta-1}$,

$$f(X\sin s, Y\cos s) = (f_1(X)\sin r(s), f_2(Y)\cos r(s)) \tag{6.28}$$

它显然是关于 S^{m-1} 上的等参函数 s 及 S^{n-1} 上的等参函数 r 的等变映照，并且是水平映照。那末，我们可应用定理 6.3 来约化调和性方程。首先，由于 f_1 和 f_2 是调和，因此 $f^{\perp}$: $M_s = S^{p-1}(\sin S)\times S^{q-1}(\cos s)\to M_r = S^{\alpha-1}(\sin r)\times S^{\beta-1}(\cos r)$ 是调和映照。这样，根据定理 6.3，f 的调和性就化为方程(6.5)。显然

$$\tau^*(\bar{f}) = r''\frac{\partial}{\partial r}. \tag{6.29}$$

设单位速度等参函数 r: $S^{n-1}\to R$ 的水平超曲面的第二基本形式为 B_2，前面已说明$\left\{\frac{e_i}{\sin s}, \frac{e_a}{\cos s}\right\}$是 M_s 上的局部幺正标架场。那末，从(6.27)式类似的关系可得

$$
\begin{aligned}
&B_2\left(f_*\frac{e_i}{\sin s},\ f_*\frac{e_i}{\sin s}\right)+B_2\left(f_*\frac{e_a}{\cos s},\ f_*\frac{e_a}{\cos s}\right)\\
&=\frac{1}{\sin^2 s}B_2(f_*e_i,\ f_*e_i)+\frac{1}{\cos^2 s}B_2(f_*e_a,\ f_*e_a)\\
&=\frac{-1}{\sin^2 s}\langle f_*e_i,\ f_*e_i\rangle_{S^{m-1}}\operatorname{ctg} r\,\frac{\partial}{\partial r}\\
&\quad+\frac{1}{\cos^2 s}\langle f_*e_a,\ f_*e_a\rangle_{S^{m-1}}\operatorname{tg} r\,\frac{\partial}{\partial r}\\
&=\frac{-\sin^2 r}{\sin^2 s}\langle f_{1*}e_i,\ f_{1*}e_i\rangle_{S^{p-1}}\operatorname{ctg} r\,\frac{\partial}{\partial r}\\
&\quad+\frac{\cos^2 r}{\cos^2 s}\langle f_{2*}e_a,\ f_{2*}e_a\rangle_{S^{q-1}}\operatorname{tg} r\,\frac{\partial}{\partial r}\\
&=\left(\frac{\lambda_2}{\cos^2 s}-\frac{\lambda_1}{\sin^2 s}\right)\sin r\cos r\,\frac{\partial}{\partial r}. \qquad (6.30)
\end{aligned}
$$

将(6.27)式、(6.29)式和(6.30)式代入(6.5)式得到

$$
\begin{aligned}
&r''+[(p-1)\operatorname{ctg} s-(q-1)\operatorname{tg} s]r'\\
&\quad+\left(\frac{\lambda_2}{\cos^2 s}-\frac{\lambda_1}{\sin^2 s}\right)\sin r\cos r=0 \qquad (6.31)
\end{aligned}
$$

$$
0<s<\frac{\pi}{2},\ 0<r<\frac{\pi}{2}.
$$

这就是Smith构造的常微分方程。它相当于在变化重力作用下具有变化阻尼的单摆运动的方程。

映照(6.28)式可延拓到整个S^{m-1}上，我们仍用同一记号表示：$f: S^{m-1}\to S^{n-1}$，它定义为

$$
f(z)=\begin{cases}
\text{由(6.28)式所定义，如果 } z\in S^{m-1}\backslash S^{p-1}\cup S^{q-1}\\
f_1(z), \quad \text{如果 } z\in S^{p-1}\\
f_2(z), \quad \text{如果 } z\in S^{q-1}.
\end{cases} \qquad (6.32)
$$

如果$r(s)$满足下列边界条件，由(6.32)式定义的映照是连续的：

$$
\lim_{s\to 0} r(s)=0,\ \lim_{s\to\frac{\pi}{2}} r(s)=\frac{\pi}{2}. \qquad (6.33)
$$

因此，对于(6.31)式，满足(6.33)条件的解，(6.32)定义了连续映照f: $S^{m-1}\to S^{n-1}$，并且f在$M^0=S^{m-1}\backslash S^{p-1}\cup S^{q-1}$上为调和映

照。利用截断函数技巧，不难说明 f 是 S^{m-1} 到 S^{n-1} 的弱调和映照。为此，记 i：$S^{n-1}\to R^n$ 为标准嵌入，$F=i\circ f$。f 在 M^0 上调和意味着对任何 $\psi_0\in C_0^\infty(M^0, R^n)$ 满足(见(5.4)式)

$$\int_{S^{m-1}}\langle\nabla F, \nabla\psi_0\rangle *1=\int_{S^{m-1}}|\nabla F|^2\langle F, \psi_0\rangle *1. \tag{6.34}$$

设 $\psi\in C_0^\infty(S^{m-1}\setminus S^{q-1}, R^n)$，并且考虑下列截断函数

$$\eta(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant 1 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } t\geqslant 2 \text{ 时, 且 } |\eta'(t)|<c.\end{cases}$$

设 $\eta_k=\eta(ks)$ 其中 s 为 S^{m-1} 上前面定义的等参函数。考虑到 $\operatorname{supp}(1-\eta_k)=\left\{S<\frac{2}{k}\right\}$，$\operatorname{supp}(\nabla\eta_k)=\left\{\frac{1}{k}<s<\frac{2}{k}\right\}$，以及

$$\begin{aligned}\int_{S^{m-1}}|\nabla\eta_k|^2 *1&\leqslant c'k^2\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}}\sin^{p-1}s\cos^{q-1}s\,ds\\ &\leqslant c'k^2\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}}s^{p-1}ds<L,\end{aligned}$$

这里 c' 和 L 是与 k 无关的常数。

取 $\psi_0=\eta_k\psi$，那末

$$\begin{aligned}&\int_{S^{m-1}}\{\langle\nabla F, \nabla\psi\rangle-|\nabla F|^2\langle F, \psi\rangle\}*1\\ =&\int_{S^{m-1}}\{\langle\nabla F, \nabla\psi_0\rangle-|\nabla F|^2\langle F, \psi_0\rangle\}*1\\ &+\int_{S^{m-1}}\langle\nabla F, \nabla((1-\eta_k)\psi)\rangle *1\\ &-\int_{S^{m-1}}|\nabla F|^2\langle F, (1-\eta_k)\psi\rangle *1\end{aligned}$$

当 k 趋向于无穷大时，趋向于零。这说明了 f 在 $S^{m-1}\setminus S^{q-1}$ 上的弱调和性。类似的方法可将弱调和性扩充到焦流形 S^{q-1}，从而得到 f 在整个 S^{m-1} 上的弱调和性。

对连续的弱调和映照运用主正则性定理即知道 f 在 S^{m-1} 上的光滑性，这样就得到了调和映照 f：$S^{m-1}\to S^{n-1}$。因此，我们将问题化为求方程(6.31)满足边界条件(6.33)的解。

6.4.2 常微分方程的可解性

考虑下列常微分方程问题

$$r'' + [(p-1)\operatorname{ctg} s - (q-1)\operatorname{tg} s]r' + \left(\frac{\lambda_2}{\cos^2 s} - \frac{\lambda_1}{\sin^2 s}\right)\sin r \cos r = 0,$$

$$\lim_{s\to 0} r(s) = 0, \quad \lim_{s\to\frac{\pi}{2}} r(s) = \frac{\pi}{2}$$

其中 p, $q \geqslant 2$, λ_1, $\lambda_2 > 0$ 均为实参数。

Smith 在文献[112]中得到它有解的条件是

1) $(p-2)^2 < 4\lambda_1$ 并且 $(q-2)^2 < 4\lambda_2$,

或 2) $p=q$ 并且 $\lambda_1 = \lambda_2$.

Ratto 进一步指出当 $\lambda_1 = p-1 \leqslant 5$ 时方程仍然有解[92].

本节将证明下述定理.

定理 6.9[26]、[91] 设 $\lambda_1(q-2) \geqslant \lambda_2(p-2)$, 那末方程(6.31)在边界条件(6.33)下有解的充要条件是

1) $(q-2)^2 < 4\lambda_2$, (6.35)

或 2) $(q-2)^2 \geqslant 4\lambda_2$ 并且

$$\sqrt{(p-2)^2 + 4\lambda_1} + \sqrt{(q-2)^2 - 4\lambda_2} < p+q-4.$$

本书将采用文献[26]中的变分直接法证明上述定理。为此，考虑由(6.32)式定义的映照的能量。不难计算

$$E(f) = c\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r'^2 + \frac{\lambda_1 \sin^2 r}{\sin^2 s} + \frac{\lambda_2 \cos^2 r}{\cos^2 s} \right) v\,ds,$$

其中 c 是常数，由 S^{p-1} 和 S^{q-1} 的体积所决定，$v = \sin^{p-1} s \cos^{q-1} s$. 令

$$J(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r'^2 + \frac{\lambda_1 \sin^2 r}{\sin^2 s} + \frac{\lambda_2 \cos^2 r}{\cos^2 s} \right) v\,ds, \qquad (6.36)$$

那末，方程(6.31)是泛函(6.36)的欧拉-拉格朗日方程。这样，问题化为求满足下列条件

$$0 \leqslant r(s) \leqslant \frac{\pi}{2}, \text{ 当 } 0 < s < \frac{\pi}{2} \text{ 时},$$

并且

$$\lim_{s\to 0} r(s)=0,\quad \lim_{s\to\frac{\pi}{2}} r(s)=\frac{\pi}{2}$$

的泛函(6.36)的临界点 r。为此定义下列希尔伯特空间

$$X=\left\{\alpha\in\mathscr{L}_1^2\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right),R\right);\ \|\alpha\|^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\alpha'^2+\alpha^2)\,v ds<\infty\right\},$$

当 $p>2$, $q>2$ 时，根据 Sobolev 不等式，我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha^2\sin^{p-3}s\cos^{q-1}s\,ds\leqslant C'\sup\alpha^2\leqslant C\|\alpha\|^2,$$

以及

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha^2\sin^{p-1}s\cos^{q-3}s\,ds\leqslant C\|\alpha\|^2.$$

因此，J 当 $p>2$, $q>2$ 时有意义，并且是光滑的。如果允许 J 取值∞，那末，它对 $p=q=2$ 也同样可以定义。

引理 6.10 在凸闭子集 $X_0=\{\alpha\in X;$ 对任何 $0<s<\frac{\pi}{2}$ 有 $0\leqslant\alpha(s)\leqslant\frac{\pi}{2}\}$ 上 $J(\alpha)$ 存在临界点 r，即方程(6.31) 存在解 $\gamma\in X_0$。

证明 对任何 $\alpha(s)\in X$，定义

$$\alpha^*(s)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{如果 } \alpha(s)>\frac{\pi}{2}\\ \alpha(S), & \text{如果 } 0\leqslant\alpha(s)\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{如果 } \alpha(s)<0\end{cases}$$

记

$$G(s,\alpha)=\frac{\lambda_1\sin^2\alpha}{\sin^2 s}+\frac{\lambda_2\cos^2\alpha}{\cos^2 s},$$

那末

$$J(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\alpha'^2+G(s,\alpha)]\,v ds.$$

定义

$$J^*(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\alpha'^2+F(s,\alpha)]\,v ds,$$

其中

$$F(s,\alpha)=\begin{cases}G\left(s,\ \dfrac{\pi}{2}\right), & \text{当 } \alpha(s)>\dfrac{\pi}{2}\\ G(s,\alpha), & \text{当 } 0\leqslant\alpha(s)\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ G(s,0), & \text{当 } \alpha(s)<0.\end{cases}$$

显然

$$J(\alpha^*)=J^*(\alpha^*)\leqslant J^*(\alpha). \tag{6.37}$$

取X中关于J^*的极小化序列$\alpha_i\in X$。由于(6.37)式，不妨设$\alpha_i\in X_0$。由于$\{\alpha_i\}$有界，所以构成X中的弱闭集。因此，存在子序列，不妨仍记为$\{\alpha_i\}$，弱收敛于$r\in X_0$。可以验证，J^*在X上是弱下半连续的，因此

$$J^*(r)=\inf_{\alpha\in X}J^*(\alpha).$$

由于正则性，r是光滑的，因此，它是$J^*(r)$的欧拉-拉格朗日方程的解。又由于$J(\alpha)$和$J^*(\alpha)$在X_0上一样，r也是$J(\alpha)$的欧拉-拉格朗日方程的解，即r是方程(6.31)的解。

为了得到方程(6.33)解的边界性态，作自变量变换$\operatorname{tg}s=e^t$，并记$A(t)=r(\operatorname{arc\,tg}e^t)$，那末方程(6.31)可改写为

$$A''+\frac{(p-2)e^{-t}-(q-2)e^t}{e^t+e^{-t}}A' \\ +\frac{\lambda_2e^t-\lambda_1e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\sin A\cos A=0. \tag{6.38}$$

引理6.11 如果$r\in X_0$是方程(6.31)的非常值解，那末$A(t)=r(\operatorname{arc\,tg}e^t)$是方程(6.38)的解，并且对充分大的$|t|$有$A'(t)>0$，以及

$$\lim_{t\to-\infty}A(t)=0,\ \lim_{t\to\infty}A(t)=\frac{\pi}{2},$$

即r满足(6.33)式：

$$\lim_{s\to0}r(s)=0,\ \lim_{s\to\frac{\pi}{2}}r(s)=\frac{\pi}{2}.$$

证明 首先注意到对任何$t\in R$，有

$$0<A(t)<\frac{\pi}{2}. \tag{6.39}$$

如果存在 $\bar{t}\in R$，使 $A(\bar{t})=0$，那末，$A'(\bar{t})\neq 0$，(否则从方程(6.38)可得在 $\bar{s}$ 的各阶导数均为 0 而导致 $A\equiv 0$)。这样，A 将在 $\bar{s}$ 附近取负值而与 $r\in X_0$ 相矛盾。同样，A 也不可能取值 $\frac{\pi}{2}$。

令 $$V=\frac{(q-2)e^t-(p-2)e^{-t}}{e^t+e^{-t}},\ U=\frac{\lambda_2 e^t-\lambda_1 e^{-t}}{e^t+e^{-t}},$$

则方程(6.38)简写为

$$A''=VA'-U\sin A\cos A. \tag{6.40}$$

1) 如果 $q>2$。取 R 充分大，使 U, V 在 (R,∞) 上均大于零。如果存在 $t_0>R$，使 $A'(t_0)\leqslant 0$，那末，根据(6.40)式 $A''(t_0)<0$，从而当 $t>t_0>R$ 时，我们有 $A'(t)<0$ 和 $A''(t)<0$。这种情形和(6.39)式相矛盾。因此，当 $t>R$ 时 $A'(t)>0$。

2) 如果 $q=2$。同样取 R，使 U 在 (R,∞) 上为正。如果存在 t_0, $t_1>R$，使 $A'(t_0)=A'(t_1)=0$，那末，从(6.40)式得到 $A''(t_0)<0$, $A''(t_1)<0$，即 t_0 和 t_1 是 A 的极大值点。这样，在 (t_0,t_1) 中必存在 A 的极小值点 t^*, $A'(t^*)=0$, $A''(t^*)>0$，但这与(6.40)式相矛盾。因此，我们不妨将 R 再取大一点，使 A 在 (R,∞) 上保持定号。如果，当 $t\in(R,\infty)$ 时 $A'(t)<0$。但考虑到泛函 J 关于参数 q 的连续性及前面 1) 的结果，这是不可能的。所以当 $t>R$ 时，$A'(t)>0$。

$A(t)$ 在 t 充分大时的单调增加性确保了极限 $\lim\limits_{t\to\infty}A(t)$ 的存在性。考虑到(6.39)式，必有序列 $t_i\to\infty$，使 $\lim\limits_{t_i\to\infty}A'(t_i)=\lim\limits_{t_i\to\infty}A''(t_i)=0$，在这些点列上考虑方程(6.40)即得 $\lim\limits_{t\to\infty}A(t)=\frac{\pi}{2}$。

类似的讨论可知，t 充分接近于 $-\infty$ 时，$A'(t)>0$ 并且 $\lim\limits_{t\to-\infty}A(t)=0$。

注意到方程(6.31)的常值解只可能是 0 和 $\frac{\pi}{2}$，有下列结果。

引理6.11的推论 如果$r\in X_0$是方程(6.31)的解，$J(r)<\min\left(J(0),\ J\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$，那末$r$是方程(6.31)满足条件(6.33)的解。

考虑到0和$\frac{\pi}{2}$间的对称性，我们只要考虑其中之一。事实上，

$$J\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda_1 v}{\sin^2 s}\,ds=\frac{\lambda_1(q-2)}{p-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}s\cos^{q-3}s\,ds,$$

$$J(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda_2 v}{\cos^2 s}\,ds=\lambda_2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}s\cos^{q-3}s\,ds.$$

因此，只要假定

$$\lambda_1(q-2)\geqslant\lambda_2(p-2),\tag{6.41}$$

就有

$$J\left(\frac{\pi}{2}\right)\geqslant J(0),$$

注意到(6.41)式总可满足，否则在用(6.28)式构造映照时交换S^{p-1}和S^{q-1}以及交换$S^{\alpha-1}$和$S^{\beta-1}$的地位即可。

下面考虑0作为J临界点的稳定性。J在0的第二变分公式为

$$I(u,\ u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[u'^2+\left(\frac{\lambda_1}{\sin^2 s}-\frac{\lambda_2}{\cos^2 s}\right)u^2\right]v\,ds.\tag{6.42}$$

令$u=\sin^a s\cos^{-b}s$，其中a，b为整数。那末当$a>0$，$b<\frac{q-2}{2}$时，$u\in X$，并且

$$\begin{aligned}I(u,\ u)=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}(b^2\sin^2 s-\lambda_2)\sin^{2a+p-1}s\cos^{q-2b-3}s\,ds\\&+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a^2\cos^2 s}{\sin^2 s}+2ab+\frac{\lambda_1}{\sin^2 s}\right)\sin^{2a+p-1}s\cos^{q-2b-1}s\,ds.\end{aligned}\tag{6.43}$$

当b趋向于$\frac{q-2}{2}$时，(6.43)式的右端第二项积分有界。而当$\lambda_2>\frac{(q-2)^2}{4}$时，(6.43)式的右端第一项的被积函数为负值，并且当

b 趋向于 $\frac{q-2}{2}$ 时，积分发散。因此，当 $\lambda_2 > \frac{(q-2)^2}{4}$ 时，总可取到 $a>0$ 和 $b<\frac{q-2}{2}$，$u=\sin^a s\cos^{-b}s$，使 $I(u,u)<0$。这说明当 $4\lambda_2>(q-2)^2$ 时，0 是 J 的不稳定临界点。我们再来进一步讨论 $4\lambda_2\leqslant(q-2)^2$ 时，临界点 0 的稳定性。

如记

$$Q(s)=\frac{\lambda_1}{\sin^2 s}-\frac{\lambda_2}{\cos^2 s},$$

那末，第二变分公式(6.42)可改写成

$$I(u,\ u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{d}{ds}(u'v)+Q(s)uv\right)uds,$$

为此，考虑 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上的常微分算子

$$Lu=\frac{d}{ds}(u'v)-Quv,$$

那末，

$$I(u,\ u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-uLuds.$$

设

$$\mu_0=\inf_{u\in X}\left\{I(u,\ u);\ u\in X,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}u^2vds=1\right\}. \qquad (6.44)$$

因算子 L 在 0 和 $\frac{\pi}{2}$ 点有奇性且不是椭圆的，首先在 $\left[\varepsilon,\ \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$ 上考察算子 L 的第一特征值问题。设

$$H_\varepsilon=\left\{u\in X,\ \mathrm{supp}\ u\subset\left[\varepsilon,\ \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]\right\},$$

令

$$\mu_\varepsilon=\inf\left\{I(u,\ u),\ u\in H_\varepsilon,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}u^2vds=1\right\},$$

它就是算子 L 在 H_ε 中满足 Dirichlet 条件的第一特征值，并且对应的第一特征函数 $u_\varepsilon>0$。显然，对 $\varepsilon>\varepsilon'$ 有 $H_\varepsilon\subset H_{\varepsilon'}$，因此 μ_ε

随 ε 单调递增，并且 $\mu_\varepsilon \geqslant \mu_0$。所以当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon \geqslant \mu_0$。另一方面，对任何 $u \in X$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 v ds = 1$，令 $u_\varepsilon = \eta_\varepsilon u$，其中 η_ε 是连续函数，并且

$$\eta_\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{当 } s \in [0, \varepsilon], \left[\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2}\right] \\ 1, & \text{当 } s \in \left[2\varepsilon, \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon\right] \\ \text{线性, 其他。} \end{cases}$$

那末 $u_\varepsilon \in H_\varepsilon$，并且 $\varepsilon \to 0$ 时，$u_\varepsilon \to u$，$I(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \to I(u, u)$。另一方面

$$I(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geqslant \mu_\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_\varepsilon^2 v ds.$$

在上式中令 $\varepsilon \to 0$，得

$$I(u, u) \geqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 v ds = \lim \mu_\varepsilon,$$

因此

$$\mu_0 \geqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon = \mu_0.$$

如果 μ_0 有限，并且被某 u_0 所达到，那末，u_0 是(6.44)式所定义泛函的下列欧拉-拉格朗日方程的解

$$Lu_0 + \mu u_0 v = 0,$$

即

$$\frac{d}{dt}(u_0' v) - Q u_0 v + \mu u_0 v = 0. \tag{6.45}$$

我们以 $u_\mu = \sin^a s \cos^{-b} s$ 代入上式，比较系数后，可知，当

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(p-2)^2 + 4\lambda_1} - (p-2)\right] \\ b = \frac{1}{2}\left[(q-2) - \sqrt{(q-2)^2 - 4\lambda_2}\right] \\ \mu = (b-a)^2 - (b-a)(p+q-2), \end{cases} \tag{6.46}$$

u_μ 正好是(6.45)式的解。

引理 6.12 $\mu=\mu_0$

证明 首先,

$$I(v_\mu, u_\mu)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-u_\mu Lu_\mu=\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}u_\mu^2 v ds,$$

所以

$$\mu_0\leqslant\mu. \tag{6.47}$$

另一方面,对 L 在 H_ε 中满足 Dirichlet 条件的第一特征值 μ_ε 和相应特征函数 $u_\varepsilon>0$,有

$$u_\mu(Lu_\varepsilon+\mu_\varepsilon u_\varepsilon v)=0,$$

以及

$$-u_\varepsilon(Lu_\mu+\mu u_\mu v)=0.$$

因而

$$(\mu_\varepsilon-\mu)\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}u_\mu u_\varepsilon v ds=\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}(-u_\mu Lu_\varepsilon+u_\varepsilon Lu_\mu)ds$$

$$=\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\left[u_\varepsilon\frac{d}{ds}(u_\mu' v)-u_\mu\frac{d}{ds}(u_\varepsilon' v)\right]ds$$

$$=-u_\mu u_\varepsilon' v\Big|_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon},$$

因 $u_\varepsilon>0$, $u_\varepsilon(\varepsilon)=u_\varepsilon\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=0$, 所以 $u_\varepsilon'(\varepsilon)\geqslant0$ 和 $u_\varepsilon'\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\leqslant 0$. 这说明上式右端非负,故得 $\mu_\varepsilon\geqslant\mu$, 又 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\mu_\varepsilon=\mu_0$, 得到

$$\mu_0\geqslant\mu, \tag{6.48}$$

从(6.47)式和(6.48)式就得到引理的结论。

以上分析说明当 $4\lambda_2\leqslant(q-2)^2$ 时,临界点 O 的稳定性取决于 μ 的符号,即 $\mu<0$ 是不稳定的,$\mu\geqslant0$ 是稳定的。而从(6.46)式可见 $\mu<0$ 等价于 $b-a>0$, 即

$$\sqrt{(p-2)^2+4\lambda_1}+\sqrt{(q-2)^2-4\lambda_2}<p+q-4,$$

这样,我们得到下列结果。

命题 6.13 如果

1) $4\lambda_2>(q-2)^2$,

或者 2) $4\lambda_2\leqslant(q-2)^2$ 并且 $\sqrt{(p-2)^2+4\lambda_1}+\sqrt{(q-2)^2-4\lambda_2}<p+q-4$, 那末, O 是 J 的不稳定临界点，否则 O 是 J 的稳定临界点。

从引理 6.10、引理 6.11 以及命题 6.13 已经得到了定理 6.9 的充分性部分的证明，现在再来证明必要性。首先，我们需要下列渐近估计，这是 Smith 所得到的[112]。

引理 6.14 设方程(6.38)满足边界条件的解为 $A(t)$, 那末，当 1) 当 $t\to\infty$ 时， $(l-O(e^{-t}))\sin A(t)\cos A(t)\leqslant A'(t)\leqslant(l+O(e^{-t}))\cos A(t)$, 2) 当 $t\to-\infty$ 时，$(k-O(e^{t}))\sin A(t)\cos A(t)\leqslant A(t)\leqslant(k+O(e^{t}))\sin A(t)$

证明 设 $l^+(t)$ 是方程 $\lambda_2-l^+(t)^2=Vl^+(t)$ 在 l 近旁的解，即

$$l^+(t)=\frac{\sqrt{V^2+4\lambda_2}-V}{2}=l+O(e^{-t}),$$

其中 V 由(6.40)式所定义。固定 t, 考虑下列方程

$$B'(s)=l^+(t)\cos B(s),\quad s\geqslant t$$

在初始条件 $B(t)=A(t)$ 下的解，

$$\sec B(s)+\operatorname{tg}B(s)=(\sec A(t)+\operatorname{tg}A(t))\exp(l^+(s-t)).$$

因此，当 $s\to\infty$ 时，$B(s)$ 严格单调增加趋于 $\frac{\pi}{2}$, 并且当 $s\geqslant t$ 时，

$$\begin{aligned}B''(s)&=-l^+(t)\sin B(s)B'(s)\\&=-(l^+(t))^2\sin B(s)\cos B(s)\\&=Vl^+\sin B(s)\cos B(s)-\lambda_2\sin B(s)\cos B(s)\\&<VB'(s)-\lambda_2\sin B(s)\cos B(s).\end{aligned}$$

如果 $B'(t)<A'(t)$, 并考虑到 $B(s)$ 的初始条件，从上式得到

$$\begin{aligned}B''(t)&<VA'(t)-\lambda_2\sin A(t)\cos A(t)\\&<VA'(t)-U\sin A(t)\cos A(t)\\&=A''(t),\end{aligned}$$

这就导致 $B'(s)<A'(s)$ 对所有 $s\geqslant t$ 成立。这和 $\lim\limits_{s\to\infty}A(s)=\lim\limits_{s\to\infty}B(s)=\frac{\pi}{2}$ 相矛盾。因此，我们得到

$$A'(t)\leqslant B'(t)=l^+(t)\cos B(t)=(l+O(e^{-t}))\cos A(t).$$

这就是引理 6.14 中 1) 的右端不等式，其余不等式也可类似地得到。

引理 6.15(基本先验估计) 设 r 是方程 (6.31) 满足初始条件(6.33)的解，那末，必定有 $J(r)<J(0)$。

证明 首先将方程改写成

$$\frac{d}{ds}(vr')=v\left(\frac{\lambda_1}{\sin^2 s}-\frac{\lambda_2}{\cos^2 s}\right)\sin r\cos r,$$

即

$$\operatorname{tg} r\ \frac{d}{dS}(vr')=v\left(\frac{\lambda_1}{\sin^2 s}-\frac{\lambda_2}{\cos^2 s}\right)\sin^2 r.$$

从(6.36)式，可得

$$\begin{aligned}J(r)-J(0)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[r'^2+\left(\frac{\lambda_1}{\sin^2 s}-\frac{\lambda_2}{\cos^2 s}\right)\sin^2 r\right]vds\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}r'^2vds+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg} r\frac{d}{ds}(vr')ds\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sec^2 r)r'^2+(\operatorname{tg} r)vr'\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}\qquad(6.49)$$

另一方面，从引理 6.14 的渐近估计，且考虑到 $r(s)$和 $A(t)$ 的关系.我们有下列不等式：当 $s\to\frac{\pi}{2}$ 时，

$$(l-O(\operatorname{ctg} s))\sin r\cos r/\sin s\cos s\leqslant r'$$
$$\leqslant(l+O(\operatorname{ctg} s))\cos r/\sin s\cos s,$$

而当 $s\to 0$ 时，

$$(k-O(\operatorname{tg} s))\sin r\cos r/\sin s\cos s\leqslant r'$$
$$\leqslant(k+O(\operatorname{tg} s))\sin r/\sin s\cos s,$$

由于这些不等式，(6.49)式右端第二项为零。这就得到

$$J(r)-J(O)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sec^2 r)r'^2ds<0.$$

为了应用临界点理论中的“山径引理”来证明定理 6 9 的必要性，我们需要证明下列引理。

引理 6.16　设 $p, q>2$，那末 $J: X_0 \to R$ 满足 Palais-Smale 条件(以后简称 PS 条件)：如果 $(\alpha_i)_{i\geq 1}\subset X_0$ 是使 J 有界的序列，并且当 $i\to\infty$ 时，$dJ(\alpha_i)\to 0$。那末存在 (α_i) 的子序列在 X_0 中强收敛。

证明　当 $p, q>2$ 时，J 是光滑的。又因 $(J(\alpha_i))$ 有界以及 $\alpha_i\in X_0$，所以 $(\|\alpha_i\|)_{i\geq 1}$ 有界。那末，存在子序列，仍记为 (α_i)，在 X_0 中弱收敛于 $\alpha_0\in X_0$，并由 Sobolev 紧嵌入定理，当 $i, j\to\infty$ 时，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\alpha_i-\alpha_j)^2 v ds\to 0. \tag{6.50}$$

另一方面，当 $i, j\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}&dJ(\alpha_i)(\alpha_i-\alpha_j)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\alpha_i'(\alpha_i'-\alpha_j')+Q(\alpha_i-\alpha_j)\sin\alpha_i\cos\alpha_i]v ds\to 0,\end{aligned}$$

其中

$$Q=\frac{\lambda_1}{\sin^2 s}-\frac{\lambda_2}{\cos^2 s}.$$

将上式中 i, j 交换得到另一式，二式相减得到

$$\begin{aligned}&[dJ(\alpha_i)-dJ(\alpha_j)](\alpha_i-\alpha_j)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\alpha_i'-\alpha_j')^2 v ds\\&\quad+\int_0^{\frac{\pi}{2}}Q(\alpha_i-\alpha_j)(\sin\alpha_i\cos\alpha_i-\sin\alpha_j\cos\alpha_j)v ds\to 0.\end{aligned} \tag{6-51}$$

让我们来估计(6.51)式中的第二项。它显然被

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|Q|(\alpha_i-\alpha_j)^2 v ds$$

所控制，而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|Q|(\alpha_i-\alpha_j)^2 v ds$$

$$=\left(\int_0^{\varepsilon}+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\right)|Q|(\alpha_i-\alpha_j)^2vds$$

$$\leqslant\left(\int_0^{\varepsilon}+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\right)|Q||\alpha_0|^2vds+c(\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}(\alpha_i-\alpha_j)^2vds,$$

其中 $c(\varepsilon)$ 为依赖于 ε 的常数。先取 ε 充分小使上式中头二项充分小，然后固定 ε，当 i，j 充分大时，第三项也可任意小，因此，当 i，$j\to\infty$ 时，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|Q|(\alpha_i-\alpha_j)^2vds\to 0,$$

代入(6.51)式得到，当 i，$j\to\infty$ 时，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\alpha_i'-\alpha_j')^2vds\to 0.$$

它和(6.50)式即说明 (α_i) 是 X_0 中强收敛序列。

定理 6.17[2] 设 X_0 是 Banach 空间 X 中的凸闭子集，$f\in C'(X_0, R)$。设 $\Omega\subset X_0$ 是相对开集 $x_0\in\Omega$，$x_1\notin\overline{\Omega}$。令

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1], X_0); \gamma(0)=x_0,\ \gamma(1)=x_1\},$$

$$C_0=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}f\circ\gamma(t).$$

如果

1) $C\overset{\text{def}}{=}\inf\limits_{x\in\partial\Omega}f(x)>\max\{f(x_0), f(x_1)\}$,

2) f 在 X_0 上满足(PS)条件，

那末，$C_0\geqslant C$ 是 f 的一个临界值。

作为其推论，有下列结果。

定理 6.17 的推论[2] 设 X_0 是 Banach 空间 X 中的凸闭子集，$f\in C^1(X_0, R)$。设 f 有两个孤立局部极小点 α_1 和 α_2，并在 X_0 上满足(PS)条件，那末，必存在第三个临界点 α，使

$$f(\alpha)>\max\{f(\alpha_1), f(\alpha_2)\}.$$

命题 6.18 设 $J\left(\frac{\pi}{2}\right)\geqslant J(0)$。方程 (6.31) 有满足边界条件

(6.33)解的充要条件为 $O\in X_0$ 是 J 的不稳定临界点。

证明 从引理 6.10 和引理 6.11 立即得到充分性的证明。如果 $p, q>2$, $O\in X_0$ 是强稳定临界点，即(6.46)式中的 $\mu>0$, 方程(6.31)、(6.33)必无解，否则设解为 α。从引理 6.15, 必有

$$J(\alpha)<J(O),$$

从而 $J(r)=\inf\limits_{\beta\in X_0} J(\beta)<J(O)$。将"山径引理"即定理 6.17 的推论应用于凸闭集

$$Y_0=\left\{\beta\in X; 0\leqslant\beta\leqslant\gamma(s),\ \forall s\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

上的 J, 那末, O 和 $r(s)$ 都是 Y_0 中孤立局部极小点，并且类似于引理 6.16 的证明, J 在 Y_0 中也满足(PS)条件，因此存在 $\beta\in Y_0$, 使 $J(\beta)>J(O)$。又因 $\beta\neq 0, \dfrac{\pi}{2}$, 所以 β 也是方程(6.31)、(6.33)的解，但从引理 6.15 必须有 $J(\beta)<J(O)$, 这就得到矛盾。因此当 $p, q>2$, $O\in X_0$ 是强稳定临界点时，方程(6.31)、(6.33) 不可能有解。如果在 p, q 中有一为 2, 或 $\mu=0$ 时，令 $p, q, \lambda_1, \lambda_2$ 适当扰动，使 $p, q>2$, $\mu>0$。对扰动后参数，方程(6.31)、(6.33)无解，因而 $\inf\limits_{\lambda\in X_0} J(r)\geqslant J(O)$, 由连续性它对原来 $p, q, \lambda_1, \lambda_2$ 也成立。另一方面，这时如果方程(6.31)、(6.33)有解的话，根据引理 6.15 必有 $\inf\limits_{r\in X_0} J(r)<J(O)$, 因而矛盾。 ∎

结合命题 6.13 和命题 6.18 就得到了定理 6.9。

6.4.3 Smith 构造的应用

设 $f_1: S^{p-1}\to S^{p-1}$, $f_2: S^{q-1}\to S^{q-1}$, 作它们的并 f_1*f_2, 它将 S^{p+q-1} 映照到 S^{p+q-1}。事实上，对任何 $Z\in S^{p+q-1}$, 存在 $X\in S^{p-1}$, $Y\in S^{q-1}$ 和 $S\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 使

$$Z=(X\sin S,\ Y\cos S),$$

那末

$$f_1*f_2(Z)=(f_1(X)\sin S,\ f_2(Y)\cos S).$$

当 f_1 和 f_2 是光滑映照时，不难验证 $\deg(f_1*f_2)=\mathrm{dag}\, f_1\cdot\deg f_2$,

因此，它对任何连续映照 f_1 和 f_2 都是成立的。

当 f_1 和 f_2 是齐次调和多项式映照时，Smith 定义

$$f(Z)=(f_1(X)\sin\alpha(S),\ f_2(Y)\cos\alpha(S)),$$

其中 $\alpha(S)$ 是方程(6.33)、(6.35) 的解。显然可见，f 是同伦于 f_1*f_2。

将定理 6.9 应用于下列情形：设 $f_1(Z)=Z^k$，$z\in S^1\subset C$，k为非负整数，而取 $f_2=id$ 即 $p=2, \lambda_1=k^2, \lambda_2=q-1$，当 $2\leqslant q\leqslant b$ 时，方程(6.31)(6.33)有解，因而由(6.32)式定义了调和映照 $f: S^{q+1}\to S^{q+1}$，而 $\deg(f)=k$，另外球上关于过球心任一平面的反射映照是度数为 -1 的等距映照。用反射映照与 f 的复合映照可得到 S^{q+1} 到自身的拓扑度为 $\pm k$ 的调和映照，$2\leqslant q\leqslant 6$。至于 S^2 到自身的任意拓扑度的调和映照早已在文献[29]中给出。考虑到球同伦群 $\pi_m(S^m)$ 由拓扑度所刻划，因此得到下面定理 6.19。

定理 6.19[112] 当 $m\leqslant 7$ 时，球同伦群 $\pi_m(S^m)$ 的任一类都存在调和代表元。

Smith 构造的出发点是基于球面到球面的齐次调和多项式映照 f_1 和 f_2。一般地，我们不能控制象球面的维数，它随着多项式次数的增加而迅速增加。前面，利用最低维球面 S^1 上任意拓扑度的映照 f_1 的同纬映照(即 $f_2=id$)的同伦变形得到了定理 6.19的结论。为了获得进一步的结果，希望有更多的球面到自身的齐次调和多项式映照。已经知道一大类这种映照是从球面上等参函数的梯度向量所生成的。由等参超曲面的理论知道球面上不同主曲率的个数 g 只能是1, 2, 3, 4, 6，主曲率的重数只可能有 2 个不同的数 m_1, m_2。当 g 为奇数时 $m_1=m_2$。不同主曲率重数相同的等参超曲面所对应的 Cartan 多项式是齐次调和多项式，取它们的梯度向量，就得到了我们所要的映照。在文献[30]的第 8 节中列出了所有我们感兴趣的已知情况。当 $g=3$ 时，定义了 2 次调和多项式映照

$$h_1: S^4\to S^4,\quad \deg h_1=0,$$

$$h_2: S^7\to S^7,$$

$$h_3: S^{13}\to S^{13},\quad \deg h_i=2,\ i=2,3,4$$

$$h_4: S^{25}\to S^{25}.$$

当 $g=4$ 时，定义了3次调和多项式映照

$$h_5: S^5\to S^5,$$

$$h_6: S^9\to S^9.$$

当 $g=6$ 时，定义了5次调和多项式映照

$$h_7: S^7\to S^7,\quad \deg h_7=1,$$

$$h_8: S^{13}\to S^{13}.$$

对 h_5, h_6, h_8 不知道它们的拓扑度。当维数大于7时，这些映照都是奇数维球面之间的映照。

用上述任意二个映照，都可用定理6.9，考察是否满足条件，如果满足条件就得到调和映照。特别地，在文献[32]中，用 h_7 代替定理6.19中 $f_2=id$ 的地位，得到了下述结果：$\pi_9(S^9)$ 的任一类都存在调和代表元。

对球面的高维同伦群，情形更不清楚。简单的是 $\pi_3(S^2)=\mathbb{Z}$，并且可以由Hopf不变量所刻划。如众所周知的标准的Hopf纤维映照 $h: S^3\to S^2$ 是 $\pi_3(S^2)$ 的生成元，它的Hopf不变量 $H(h)=1$。

引理 6.20　设 $\pi: E\to M$ 是Riemann浸没，并且是调和映照，$f: M\to N$ 是调和映照的充要条件是 $f\circ\pi: E\to M$ 为调和映照。

证明　取 E 中的局部幺正标架场 $\{e_i, e_\alpha\}$，使 $\{e_i\}$ 是基本向量场，e_α 是纤维的切向量场。那末，$\pi_* e_i$ 为 M 中的幺正标架场，$\pi_* e_\alpha=0$。那末，从映照的复合公式(1.64)立即得到

$$\tau(f\circ\pi)(x)=\tau(f)(\pi(x)).\quad \blacksquare$$

定理 6.21　在 $\pi_3(S^2)$ 中Hopf不变量为 $\pm k^2$ 的类存在调和代表元。

证明　设 $f_k: S^2\to S^2$ 为拓扑度为 k 的调和映照，将它和Hopf映照 $h: S^3\to S^2$ 复合，得到映照 $f_k\circ h$。从引理6.20知它是调和映照，从Hopf不变量的基本性质知

$$H(f_k\circ f)=H(f)(\deg f)^2=k^2.\quad \blacksquare$$

注 关于 Hopf 不变量的定义和性质见 Husemoller 的 Fibre Bundles 的书中第 196～202 页。

6.4.4 另一等变映照的构造

在 $m+1$ 维复向量空间 C^{m+1} 中有标准厄米内积

$$(z, w)=\sum_{k=0}^{m} z_k\overline{w}_k,$$

C^{m+1} 也可看成欧氏空间 R^{2m+2}。它的欧氏内积记成

$$\langle Z, w\rangle=\mathrm{Re}(Z, w),$$

那末对 $Z=X+iY$, $W=U+iV$.

$$\langle Z, w\rangle=\langle X, U\rangle+\langle Y, V\rangle.$$

在 C^{m+1} 上考虑函数(假定 $m\geqslant 2$)

$$F(z)=\left|\sum_{k=1}^{m} z_k^2\right|^2=(|X|^2-|Y|^2)^2+4\langle X, Y\rangle^2,$$

记 F 在单位球面 S^{2m+1} 上的限制为 G, 那末,

$$|dG|^2=16G(1-G),\ \Delta G=16-G(16+8m). \qquad (6.52)$$

这说明, G 是球面 S^{2m+1} 上的等参函数。当 $m=2$ 时, 它由 Cartan 作出的, 而对一般 m 是由 Nomizu 给出的。从(6.52)式知焦流形对应的函数值为 $G=0$ 和 $G=1$。当 $G=1$ 时 $\left|\sum_{k=0}^{m} z_k^2\right|=1$。显然 $Z\in G^{-1}(1)$ 落在集合

$$M_0=\{e^{i\theta}x; x\in S^m\}, \qquad (6.53)$$

其中 S^m 是实空间 R^{m+1} 中的单位球面。对 $x\in S^m$

$$T_xM_0=T_xS^m+\mathrm{span}\{ix\},$$

所以法空间为

$$N_xM_0=\{iy, y\in S^m, \langle x, y\rangle=0\},$$

过 x 以 iy 为方向的 M_0 的法测地线是 $x\cos t+iy\sin t$。一般地, 在 $e^{i\theta}x\in M_0$, 有,

$$NM_0=\{e^{i\theta}iy; y\in S^m, \langle x, y\rangle=0\},$$

所以过 $e^{i\theta}x$ 以 $e^{i\theta}iy$ 为方向的 M_0 的法测地线是

$$e^{i\theta}x\cos t+e^{i\theta}iy\sin t=e^{i\theta}(x\cos t+iy\sin t),$$

设 $V_{m+1,2}$ 表示 R^{m+1} 中所有单位正交向量对 (x, y) 所组成的

Stiefel 流形，因此，焦流形 M_0 半径为 t 的管状超曲面为

$$M_t=\{e^{i\theta}(x\cos t+iy\sin t);\ (x,y)\in V_{m+1,2}\}. \quad (6.54)$$

事实上 f_t: $S^1\times V_{m+1,2}\to M_t\left(t\neq 0,\ \frac{\pi}{4}\right)$是浸入并且是二次覆盖，其中

$$f_t(\theta,\ (x,y))=e^{i\theta}(x\cos t+iy\sin t),$$

满足 $f_t(\theta,\ (x,y))=f_t(\theta+\pi,\ (-x,-y))$。将 (6.54) 式代到函数 F 的定义式有

$$G(z)=\cos^2 2t,$$

因而，从(6.52)式即知 t 是单位速度的等参函数。也可看到另一焦流形对应的参数是 $t=\frac{\pi}{4}$。因为相邻焦流形沿法测地线相距$\frac{\pi}{4}$，那末，从等参函数的一般理论知道 M_t 有4个不同主曲率。但我们为今后计算方便再来直接计算一下。

设 e_1, …, e_{m+1} 是 R^{n+1} 的标准正交基，其中 e_i 的第 i 坐标为1，其余都为0。取 $p\in M_t$，使

$$p=(e_1\cos\theta\cos t-e_2\sin\theta\sin t,$$
$$e_1\sin\theta\cos t+e_2\cos\theta\sin t).$$

M_t 的法向量场为

$$\frac{\partial}{\partial t}=(-x\cos\theta\sin t-y\sin\theta\cos t,$$
$$-x\sin\theta\sin t+y\cos\theta\cos t),$$

其中$(x,y)\in V_{m+1,2}$。设

$$\alpha_i=(e_i\cos\theta,\ e_i\sin\theta),$$
$$\beta_i=(-e_i\sin\theta,\ e_i\cos\theta),\ i=3,\ \cdots,\ m+1$$
$$\gamma=(e_1\sin\theta\sin t+e_2\cos\theta\cos t,$$
$$-e_1\cos\theta\sin t+e_2\sin\theta\cos t),$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}=(-e_1\sin\theta\cos t-e_2\cos\theta\sin t,$$
$$e_1\cos\theta\cos t-e_2\sin\theta\sin t),$$

那末$\left(\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma,\ \frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)$ 组成 $p\in M_t$ 附近 S^{2m+1} 的一个标架

场。由计算得

$$\nabla_{\alpha_i}\frac{\partial}{\partial t}=-\operatorname{tg} t(e_i\cos\theta,\ e_i\sin\theta),$$

$$\nabla_{\beta_i}\frac{\partial}{\partial t}=\operatorname{ctg} t(-e_i\sin\theta,\ e_i\cos\theta),$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\frac{\partial}{\partial t}=(e_1\sin\theta\sin t-e_2\cos\theta\cos t,$$

$$-e_1\cos\theta\sin t-e_2\sin\theta\cos t),$$

$$\nabla_{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}=(e_1\sin\theta\cos t-e_2\cos\theta\sin t,$$

$$-e_1\cos\theta\cos t-e_2\sin\theta\sin t)。$$

由此得到在该标架下 M_t 的第二基本形式为

$$\begin{array}{rl} & \begin{matrix} m-1 & & m-1 & & 1 & 1 \end{matrix} \\ B= & \begin{pmatrix} \operatorname{tg} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & \operatorname{tg} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\operatorname{ctg} t & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{ctg} t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos 2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos 2t & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \left.\right\}m-1 \\ \\ \\ \left.\right\}m-1 \\ \\ \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\end{array}$$

(6.55)

令 $\eta=\dfrac{1}{\sqrt{2-2\sin 2t}}\left(\gamma+\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)$, $\tau=\dfrac{1}{\sqrt{2+2\sin t}}\left(\gamma-\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)$, 那末, $\left(\alpha_i,\ \beta_i,\ \eta,\ \tau,\ \dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ 组成 S^{2m+1} 在 p 点的幺正标架场，并且 α_i, β_i, η, τ 是 M_t 的主方向，相应的主曲率为 $\operatorname{tg} t$, $-\operatorname{ctg} t$, 重数均为 $m-1$ 以及 $\operatorname{tg}\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $-\operatorname{ctg}\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 重数均为 1。

下面来定义 S^{2m+1} 到自身的映照。

对任何 $z\in S^{2m+1}$, 必有 $t\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$, 使 $z\in M_t$。因为 $S^1\times V_{m+1,2}$ 是 M_t 的二次覆盖，所以有 $\theta\in S^1$, 和 $(x,\ y)\in V_{m+1,2}$, 使

$$z = e^{i\theta}(x \cos t + iy \sin t).$$

定义映照 $f: S^{2m+1} \to S^{2m+1}$ 为

$$f(z) = e^{ik\theta}(x \cos r(t) + iy \sin r(t)), \tag{6.56}$$

其中 $k>0$ 是奇数，当 $t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$时，$r(t) \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$并且

$$\lim_{t\to 0} r(t) = 0, \lim_{t\to 0} r(t) = \frac{\pi}{4} \tag{6.57}$$

显然，当 k 为奇数时，f 是有意义的，它是关于等参函数 t 的等变映照。并且是水平映照。f 还诱导了纤维子流形间的映照 $f^{\perp}$: $M_t \to M_{r(t)}$，以及 $\bar{f}$: $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \to \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$，而 $\bar{f}$ 由 $r(t)$所确定。从定义立即可见 $f^{\perp}$ 是调和映照，而 t: $S^{2m+1} \backslash M_0 \cup M_{\frac{\pi}{4}} \to \mathbb{R}$ 是 Riemann 浸没。我们可用定理 6.3 来导出调和性方程。

从前面计算知道 M_t 在 S^{2m+1} 中的平均曲率向量为

$$H = (2 \operatorname{tg} 2t - 2(m-1) \operatorname{ctg} 2t) \frac{\partial}{\partial t},$$

因此

$$-f_* H = (2(m-1) \operatorname{ctg} 2t - 2 \operatorname{tg} 2t) r' \frac{\partial}{\partial r}. \tag{6.58}$$

设

$$c_i(u) = (\cos\theta \cos t(e_1 \cos u + e_i \sin u) - e_2 \sin\theta \sin t,$$
$$\sin\theta \cos t(e_1 \cos u + e_i \sin u) + e_2 \cos\theta \sin t)$$

是 M_t 中过 $p = c_i(0)$ 以 $c_i'(0) = \alpha_i \cos t$ 为方向的曲线，所以

$$f_* \alpha_i = \frac{1}{\cos t} \frac{d}{du} f(c_i(u))_{u=0} = \frac{\cos r}{\cos t} \alpha_i.$$

类似地，

$$f_* \beta_i = \frac{\sin r}{\sin t} \beta_i,$$

再考虑曲线 $d(u) \in M_t$，它通过 $p = d(0)$，以 $d'(0) = \tau$ 为方向，

$$d(u) = (\cos\theta \cos t(-e_1 \cos u + e_2 \sin u)$$
$$- \sin\theta \sin t(-e_1 \sin u + e_2 \cos u),$$
$$\sin\theta \cos t(e_1 \cos u + e_2 \sin u)$$
$$+ \cos\theta \sin t(-e_1 \sin u + e_2 \cos u)),$$

那末

$$f_*\gamma \quad \frac{d}{du} f(d(u))\Big|_{u=0} = \gamma.$$

显然

$$f_* \frac{\partial}{\partial\theta} = k\frac{\partial}{\partial\theta},$$

从(6.55)式可见

$$\begin{cases} B(f_*\alpha_i,\ f_*\alpha_i) = \dfrac{\cos^2 r}{\cos^2 t}B(\alpha_i,\ \alpha_i) \\ \qquad\qquad = \dfrac{m-1}{\cos^2 t}\sin r\cos r\dfrac{\partial}{\partial r} \\ B(f_*\beta_i,\ f_*\beta_i) = -\dfrac{m-1}{\sin^2 t}\sin r\cos r\dfrac{\partial}{\partial r} \\ B(f_*\eta,\ f_*\eta) = \dfrac{1}{2-2\sin 2t}B\Big(f_*\gamma + f_*\dfrac{\partial}{\partial\theta}, \\ \qquad\qquad f_*\gamma + f_*\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big) \\ \qquad\qquad = \dfrac{k\cos 2r}{(\sin t-\cos t)^2}\dfrac{\partial}{\partial r} \\ \qquad\qquad = \dfrac{k\cos 2r}{2\cos^2\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)}\dfrac{\partial}{\partial r} \\ B(f_*\tau,\ f_*\tau) = -\dfrac{k\cos 2r}{2\sin^2\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)}\dfrac{\partial}{\partial r}, \end{cases} \tag{6.59}$$

此外，显然

$$\tau^*(\bar{f}) = r''\frac{\partial}{\partial r}. \tag{6.60}$$

将(6.58)式，(6.59)式和(6.60)式代入约化方程(6 5)导出调和性方程

$$r'' + [2(m-1)\operatorname{ctg} 2t - 2\operatorname{tg} 2t]r'$$
$$+\left(\frac{m-1}{\cos^2 t} - \frac{m-1}{\sin^2 t}\right)\sin r\cos r$$

$$+\left[\frac{k}{\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}-\frac{k}{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\right]$$

$$\cdot\sin\left(r+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(r+\frac{\pi}{4}\right)=0, \tag{6.61}$$

它是下列泛函的欧拉-拉格朗日方程：

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[r'^2+\frac{(m-1)\cos^2 r}{\cos^2 t}+\frac{(m-1)\sin^2 r}{\sin^2 t}\right.$$

$$\left.+\frac{k\cos^2\left(r+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{k\sin^2\left(r+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\right]vdt, \tag{6.62}$$

其中 $v=\sin^{m-1}2t\cos 2t$。事实上，对某常数 c_1，c_2，c_1E+c_2 恰好是我们定义映照的能量泛函。

6.4.5 调和性方程的可解性

考虑下列更一般的常微分方程的边界问题：

$$r''+2(m_1\mathrm{ctg}\,2t-m_2\mathrm{tg}\,2t)r'+\left(\frac{\lambda_1}{\cos^2 t}-\frac{\lambda_2}{\sin^2 t}\right)\sin r\cos r$$

$$+\left(\frac{\lambda_3}{\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}-\frac{\lambda_4}{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

$$\cdot\sin\left(r+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(r+\frac{\pi}{4}\right)=0. \tag{6.63}$$

$$\text{当}\quad t\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\text{时，}\quad r(t)\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right), \tag{6.64}$$

$$\lim_{t\to 0}r(t)=0,\ \lim_{t\to\frac{\pi}{4}}r(t)=\frac{\pi}{4}, \tag{6.65}$$

其中 m_1，m_2，λ_1，λ_2，λ_3 及 λ_4 是正的实参数。方程 (6.63) 是下列泛函的欧拉-拉格朗日方程：

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[r'^2+\frac{\lambda_1\cos^2 r}{\cos^2 t}+\frac{\lambda_2\sin^2 r}{\sin^2 t}\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_3\cos^2\left(r+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{\lambda_4\sin^2\left(r+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\right]vdt \tag{6.66}$$

其中 $v=\sin^{m_1}2t\cos^{m_2}2t$。

定义希尔伯特空间

$$X=\left\{r\in\mathscr{L}_1^2\left(\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right),\ \mathbb{R}\right);\ \|r\|^2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(r'^2+r^2)v\,dt<\infty\right\}$$

当 $m_1, m_2>1$ 时，泛函 J 有意义，并且在 X 中是光滑的；而当 $m_1=1$ (或 $m_2=1$)时，只要允许 J 取值 ∞ 即可。考虑凸闭子集

$$X_0=\left\{r\in X;\ 当\ 0<t<\frac{\pi}{4}\ 时\ 0\leqslant r\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}.$$

运用引理 6.10 类似的技巧，我们可以证明下面引理。

引理 6.22 方程 (6.63) 存在非常数解 $r_0\in X_0$，即 $0\leqslant r_0\leqslant\frac{\pi}{4}$。

证明 对任何 $r\in X$，定义

$$r^*(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & 如果\ r(t)>\dfrac{\pi}{4}\\ r(t), & 如果\ 0\leqslant r(t)\leqslant\dfrac{\pi}{4}\\ 0, & 如果\ r(t)<0.\end{cases}\tag{6.67}$$

那末 $r^*\in X_0$。记

$$G(t,\ r)=\frac{\lambda_1\cos^2 r}{\cos^2 t}+\frac{\lambda_2\sin^2 r}{\sin^2 t}+\frac{\lambda_3\cos^2\left(r+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)}+\frac{\lambda_4\sin^2\left(r+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)},$$

那末

$$J(r)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[r'^2+G(t,\ r)]v\,dt.$$

定义

$$J^*(r)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[r'^2+F(t,\ r)]v\,dt,\tag{6.68}$$

其中

$$F(t,\ r)=\begin{cases}G\left(t,\ \dfrac{\pi}{4}\right), & \text{如果}\ r(t)>\dfrac{\pi}{4}\\ G(t,\ r), & \text{如果}\ 0\leqslant r(t)\leqslant\dfrac{\pi}{4}\\ G(t,\ 0), & \text{如果}\ r(t)<0.\end{cases}$$

显然可见

$$J(r^*)=J^*(r^*)\leqslant J^*(r). \tag{6.69}$$

这意味着

$$\inf\{J(r),\ r\in X_0\}=\inf\{J^*(r),\ r\in X\}.$$

设$\{r_i\}$是J^*在X中的极小化序列。注意到(6.69)式，不妨设$r_i\in X_0$。由于$\{r_i\}$是有界的，因此是弱闭的，那末，有子序列弱收敛于$r_0\in X_0$。可以验证J^*在X中是弱下半连续的，所以

$$J^*(r_0)=\inf_{r\in X}J^*(r).$$

又由于正则性，所以r_0是光滑的并且满足$J^*(r)$的欧拉-拉格朗日方程。考虑到$J(r)$和$J^*(r)$在X_0上相一致，因此r_0也是$J(r)$的欧拉-拉格朗日方程的解，即r_0是方程(6.63)的解。注意到该方程没有常数解，因此引理得证。 ∎

我们再考察方程(6.63)非常值解的边界性态。为此作自变量代换$\operatorname{tg}2t=e^s$，若记$r(t)=r\left(\dfrac{\operatorname{arc\,tg}e^s}{2}\right)$为$A(s)$，那末，方程(6.63)化为

$$\frac{d^2A}{ds^2}+L(s)\frac{dA}{ds}+P(s)\sin 2A+Q(s)\cos 2A=0, \tag{6.70}$$

其中

$$L(s)=\frac{(m_1-1)e^{-s}-(m_2-1)e^s}{e^s+e^{-s}}, \tag{6.71}$$

$$P(s)=\frac{\lambda_1e^{-s}\left(e^s+e^{-s}-\sqrt{1+e^{-2s}}\right)-\lambda_2e^{-s}\left(e^s+e^{-s}+\sqrt{1+e^{-2s}}\right)}{4(e^s+e^{-s})^2}, \tag{6.72}$$

$$Q(s)=\frac{\lambda_3 e^s(e^s+e^{-s}+\sqrt{1+e^{2s}})-\lambda_4 e^s(e^s+e^{-s}-\sqrt{1+e^{2s}})}{4(e^s+e^{-s})^2}. \tag{6.73}$$

由直接计算可知 $P'(s)>0$, $Q'(s)>0$。

引理 6.23 假设 $\lambda_1\leqslant\lambda_2$ 并且 $\lambda_4\leqslant\lambda_3$。如果 r_0 是方程 (6.63) 的非常值解，那末 $A'(s)\geqslant 0$, 并且

$$\lim_{s\to-\infty}A(s)=0,\ \lim_{s\to\infty}A(s)=\frac{\pi}{4},$$

即 $r'\geqslant 0$, $\lim\limits_{t\to 0}r(t)=0$, $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}r(t)=\frac{\pi}{4}$。

证明 首先，对任何 $s\in\mathbb{R}$,

$$0<A(s)<\frac{\pi}{4}, \tag{6.74}$$

否则，若存在 $\bar{s}\in\mathbb{R}$ 使 $A(\bar{s})=0$, 则有两种可能性：

1) 当 $A'(\bar{s})=0$ 时，由于 $\lambda_3\geqslant\lambda_4$ 的假设，从方程(6.70)可知 $A''(\bar{s})<0$。这意味着 $\bar{s}$ 是 A 的局部极大值，因而和假设 $r\in X_0$ 相矛盾。

2) 当 $A'(\bar{s})\neq 0$ 时，A 将取负值，这也导致和 $r\in X_0$ 的假设相矛盾。

类似地，不存在 $\bar{s}\in\mathbb{R}$, 使 $A(\bar{s})=\frac{\pi}{4}$。

如果存在 $A'(s_0)<0$, 那末，存在包含 s_0 的最大区间 (s_1, s_2), 使 $s\in(s_1, s_2)$ 时 $A'(s)<0$, 其中 s_1 和 s_2 或者有限或者无限。在这个区间中，方程(6.70)可改写成

$$\frac{A''}{A'}+L(s)=-\frac{P(s)\sin 2A+Q(s)\cos 2A}{A'}.$$

设

$$U_r(s)=2\left(\frac{A''}{A'}+L(s)\right),$$

$$V_r(s)=-2\frac{P(s)\sin 2A+Q(s)\cos 2A}{A'}.$$

那末 $U_r(s)=V_r(s)$，并且 $Y(s)\equiv 1$ 是线性方程

$$Y'(s)+U_r(s)Y(s)=V_r(s)$$

的解。注意到它通解的表达式，我们有

$$Y(s)\equiv 1\equiv\frac{\int_{\bar{s}}^{s}V_r(y)\exp\left(\int_{\bar{s}}^{y}U_r(x)dx\right)dy+c}{\exp\int_{\bar{s}}^{s}U_r(x)dx}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=\!=}\frac{N(s)}{D(s)},\tag{6.75}$$

其中 $\bar{s}\in(s_1,\ s_2)$，$c\in\mathbb{R}$。再分下列三种情况讨论：

1) 如果 s_1 和 s_2 都是有限的，那末 $A'(s_1)=A'(s_2)=0$。直接计算得

$$D(s)=(A')^2(1+e^{-2s})^{1-m_1}(1+e^{2s})^{1-m_2},$$

$$N(s)=-2\int_{\bar{s}}^{s}(P(y)\sin 2A+Q(y)\cos 2A)A'$$

$$\cdot(1+e^{-2y})^{1-m_1}(1+e^{2y})^{1-m_2}dy+c,$$

那末，对所有 $s\in(s_1,\ s_2)$，有

$$N(s)=D(s)>0,$$

$$N(s_1)=D(s_1)=0,$$

$$N(s_2)=D(s_2)=0.$$

因此在 $(s_1,\ s_2)$ 中 N 有局部极大值，即有 $s_3\in(s_1,\ s_2)$，使 $N'(s_3)=0$。另一方面，在这区间中，$A'(s)<0$，意味着 $A''(s_1)\leqslant 0$。代入方程(6.70)，得到

$$P(s_1)\sin 2A(s_1)+Q(s_1)\cos 2A(s_1)\geqslant 0,$$

注意到上式当 $A'<0$ 时是严格单调增加的，因此得到，对 $s\in(s_1,\ s_2)$，

$$P(s)\sin 2A(s)+Q(s)\cos 2A(s)>0,$$

将它代入 $N(s)$ 的表达式即知，对任何 $s\in(s_1,\ s_2)$，$N'(s)>0$，而与 $N'(s_3)=0$，$s_3\in(s_1,\ s_2)$ 相矛盾。

2) 若 s_1 有限，而 $s_2=\infty$，那末从(6.74)式知 $A'(s)$ 在某趋于 ∞ 的点列上趋向于0，因而在这些点上 N 趋向于0，而 $N(s_1)=$

0，并当 $s>s_1$ 时，$N(s)>0$，因此，存在 $s_3\in(s_1,\infty)$ 使 $N'(s_3)=0$。那末，再与上面一样讨论就得到矛盾。

3) 若 $s_1=-\infty$，那末 (6.74) 式意味着对任何 $\varepsilon>0$ 和绝对值充分大的负数 s_0，存在 $\bar{s}<s_0$，使 $-\varepsilon<A'(\bar{s})<0$。类似于 2) 的讨论说明不管 s_2 是有限或无限，总存在 $s_3\in(-\infty,s_2)$ 使 $N'(s_3)=0$。然后取绝对值充分大的负数 s_1，使 $A''(s_1)<0$ 和 $L(s_1)>0$。那末和上面一样道理将导致矛盾。

总而言之，对任何 $s\in\mathbf{R}$，总有 $A'(s)\geqslant 0$，这就保证了极限 $\lim\limits_{s\to-\infty}A(s)$ 和 $\lim\limits_{s\to\infty}A(s)$ 的存在性。

最后，我们考虑这些极限值。如果 $\lim\limits_{s\to\infty}A(s)\neq\frac{\pi}{4}$，那末存在 $\varepsilon_0>0$，使当 $\bar{s}$ 充分大时，总有 $\cos 2A(\bar{s})>\varepsilon_0$。另一方面，由于 (6.74) 式，对任何 $\varepsilon>0$ 和充分大的 s_0，总有 $s'>s_0$，使 $A'(s')<\varepsilon$，$|A''(s')|<\varepsilon$。那末，在这些点 s' 上考虑方程 (6.72)，就导致矛盾，只要注意到 $P(s)\to 0$，$Q(s)\to\frac{\lambda_3}{2}$。

类似地，我们有 $\lim\limits_{s\to 0}A(s)=0$。 ∎

从引理 6.22 和引理 6.23 就得出下述结果。

定理 6.24 如果 $\lambda_1\leqslant\lambda_2$，$\lambda_4\leqslant\lambda_3$，那末，方程 (6.63)，总存在满足条件 (6.64) 和 (6.65) 的解。并且方程 (6.63) 的任何解是稳定的。

证明 只要证明解的稳定性。对方程 (6.63) 任一解 $r(t)$，第二变分公式是

$$\frac{1}{2}I(u,u)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}u'^2+u^2\left[\left(\frac{\lambda_2}{\sin^2 t}-\frac{\lambda_1}{\cos^2 t}\right)\cos 2r\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\lambda_3}{\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}-\frac{\lambda_4}{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\right)\sin 2r\right]\Big\}v\,dt,$$

其中 $v=\sin^{m_1}2t\cos^{m_2}2t$。显然，对任何 $u\in X$，$I(u,u)>0$。

推论 6.25 方程 (6.61) 总存在满边界条件 (6.57) 的解。

6.4.6 高维球同伦群的调和代表元问题

由(6.56)式和(6.57)式定义了S^{2m+1}到自身的等变映照f，其中$r(t)$是方程(6.61)满足初始条件(6.57)的解，由于$\pi_{2m+1}(S^{2m+1})$由S^{2m+1}到自身映照的拓扑度所刻划。下面来计算$\deg(f)$。

引理 6.26 设$f: S^{2m+1}\to S^{2m+1}$是由(6.56)式和(6.57)式所义的映照，那末，$\deg(f)=k$。

证明 从引理6.23知$r'(t)\geqslant 0$。因$r'(t)$的零点是孤立的，$r(t)$是t的严格单调增加函数。因此，对任何$z\in M_{r(t)}\subset S^{2m+1}$，存在唯一的水平超曲面$M_t$，使$f(M_t)=M_{r(t)}$。对$z$是$f$的任一正则值，取$x\in f^{-1}(z)$。从推导方程(6.61)的计算过程可知$f$在$x$点的Jacobi行列式的符号为$\operatorname{sign}(kr')=1$。所以$\deg(f)$恰好等于$z$关于映照$f$的原象的个数。为此考虑下列变换图

$$\begin{array}{ccc} S^1\times V_{m+1,2} & \xrightarrow{f_1} & S^1\times V_{m+1,2} \\ \pi_1\downarrow & & \downarrow\pi_2 \\ M_t & \xrightarrow{f} & M_{r(t)} \end{array}$$

其中对$(x, y)\in V_{m+1,2}$，f_1定义为

$$(\theta, (x, y))\to(k\theta, (x, y)),$$

π_1定义为

$$(\theta, (x, y))\to e^{i\theta}(x\cos t+iy\sin t),$$

π_2定义为

$$(\theta, (x, y))\to e^{i\theta}(x\cos r(t)+iy\sin r(t)).$$

注意到π_1和π_2是局部等距和二次覆盖。如果

$$z=e^{ik\theta}(x\cos r(t)+iy\sin r(t)),$$

那末，它关于$\pi_2\circ f_1=f\circ\pi_1$有下列$2k$个原象

$$\left(\theta+\frac{2l\pi}{k}, (x, y)\right)\in S^1\times V_{m+1,2}$$

和

$$\left(\theta+\frac{(2l+1)\pi}{k}, (-x, -y)\right)\in S^1\times V_{m+1,2},$$

其中 $l=0,1,\cdots,k-1$。因 k 为奇数，设为 $2s+1$，注意到

$$\left\{\frac{(2l+1)\pi}{2s+1}\right\}_{l=s,\cdots,2s}=\left\{\frac{[2(s+l')+1]\pi}{2s+1}\right\}_{l'=0,\cdots,s}=\left\{\pi+\frac{2l'}{2s+1}\pi\right\}_{l'=0,\cdots,s},$$

以及

$$\left\{\frac{(2l+1)\pi}{2s+1}\right\}_{l=0,\cdots,s-1}\xlongequal{\bmod 2\pi}\left\{\frac{(4s+2+2l+1)\pi}{2s+1}\right\}_{l=0,\cdots,s-1}=\left\{\pi+\frac{2(s+l+1)}{2s+1}\pi\right\}_{l=0,\cdots,s-1}=\left\{\pi+\frac{2l'}{2s+1}\pi\right\}_{l'=s+1,\cdots,2s},$$

即有集合等式

$$\left\{\theta+\frac{(2l+1)\pi}{2s+1}\right\}_{l=0,\cdots,2s}=\left\{\theta+\pi+\frac{2l}{2s+1}\pi\right\}_{l=0,\cdots,2s}\pmod{2\pi}.$$

这意味着 $S^1\times V_{m+1,2}$ 中 $2k$ 个点在 π_1 映照作用下只得到 M_t 中 k 个不同点，即 $\deg(f)=k$。

从推论 6.25 以及引理 6.26 知道，对任何 $k>0$，存在拓扑度为 k 的连续映照 f。将它和 S^{2m+1} 上的关于球心的反射映照复合，得到拓扑度为 $-k$ 的映照。另一方面，在 S^{2m+1} 上的等参函数 t 的正则部分，f 是调和映照。运用截断函数技巧，和 6.4.1 中类似地，f 的弱调和性可扩充到焦流形 M_0 和 $M_{\frac{\pi}{4}}$ 上。对连续的弱调和映照运用主正则性定理得到 f 在 S^{2m+1} 上的光滑性。因此，我们证明了下面的定理。

定理 6.27[137] 在球同伦群 $\pi_{2m+1}(S^{2m+1})$ 中的任一奇数类均存在一个调和代表元。

§6.5 用等参映照构造调和映照

在本章第 1 节中，我们已给出了等参映照的定义，也说明了如何从它得到 Riemann 浸没，现在，我们来给出具体的一个等参映

照并用来构造球面中新的调和映照。

对球面中的任一点 $W\in S^{m-1}$ 可表示成

$$W=(X\cos r_1\cos r_2,\ Y\cos r_1\sin r_2,\ Z\sin r_1),$$

其中 $X\in S^{\alpha-1}$, $Y\in S^{\beta-1}$, $Z\in S^{\gamma-1}(\alpha+\beta+\gamma=m)$, 并且 $0\leqslant r_1$, $r_2\leqslant\frac{\pi}{2}$。不难验证

$$|dr_1|^2=1,\quad |dr_2|^2=\frac{1}{\cos^2 r_1}$$ 并且 $\langle dr_1, dr_2\rangle=0$. 从直接计算还可得到

$$\Delta r_1=(\gamma-1)\operatorname{ctg} r_1-(\alpha+\beta-1)\operatorname{tg} r_1,$$

$$\Delta r_2=(\beta-1)\operatorname{ctg} r_2-(\alpha-1)\operatorname{tg} r_2.$$

由此可知, $r=(r_1, r_2)$: $S^{m-1}\to R^2$ 是秩为2的等参映照. 在等参映照 r 下的正则部分是 $M^0=S^{m-1}\backslash S^{\alpha-1}\cup S^{\beta-1}\cup S^{\gamma-1}$. 它在 r 下的象为 $N^0=\left\{((r_1, r_2)\in R^2,\ 0<r_1,\ r_2<\frac{\pi}{2}\right\}$. 在 N^0 上存在唯一的 Riemann 度量 ds_r^2, 使 π: $M^0\to N^0$ 是浸没:

$$ds_r^2=dr_1^2+\cos^2 r_1 dr_2^2.$$

另一方面,对 S^{n-1} 中的任一点可表示为

$$(X\cos t,\ Y\sin t)\in S^{n-1},$$

其中 $X\in S^{p-1}$, $Y\in S^{q-1}(p+q=n)$ 并且 $t\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 是 S^{n-1} 上具二个不同主曲率的等参函数:

$$|dt|^2=1 \text{ 和 } \Delta t=(q-1)\operatorname{ctg} t-(p-1)\operatorname{tg} t.$$

我们定义映照 f: $S^{n-1}\backslash S^{p-1}\cup S^{q-1}\to S^{m-1}$ 为

$$\begin{aligned} f(X\cos t,\ Y\sin t)=(&f_1(X)\cos r_1(t)\cos r_2(t),\\ &f_2(Y)\cos r_1(t)\sin r_2(t),\\ &f_3(Y)\sin r_1(t)), \end{aligned} \tag{6.76}$$

其中 f_1, f_2 和 f_3 都是球到球的调和映照, 它们的能量密度分别为常数 $\lambda_1/2$, $\lambda_2/2$ 和 $\lambda_3/2$, 其中

$$\lambda_1=k_1(k_1+p-2),\quad \lambda_2=k_2(k_2+q-2),\quad \lambda_3=k_3(k_3+q-2),$$

$k_i=0, 1, \cdots$.

映照 f 是关于 S^{n-1} 上的等参函数 t，以及 S^{m-1} 上等参映照 r 的等变水平映照。它诱导了映照 $\bar{f}=(r_1(t), r_2(t))$：$R'\to N^0$。

下面，我们用约化定理 6.3，来推导(6 76)式所定义的映照为调和映照的条件。

由直接计算可得

$$\bar{f}_*\frac{\partial}{\partial t}=r_1'\frac{\partial}{\partial r_1}+r_2'\frac{\partial}{\partial r_2},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r_2}}\frac{\partial}{\partial r_1}=-\operatorname{tg}r_1\frac{\partial}{\partial r_2},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r_1}}\frac{\partial}{\partial r_2}=-\operatorname{tg}r_1\frac{\partial}{\partial r_2},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r_2}}\frac{\partial}{\partial r_2}=\sin r_1\cos r_1\frac{\partial}{\partial r_1}.$$

因此，得到 $\bar{f}$ 的张力场为

$$\tau(\bar{f})=(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}d\bar{f})\frac{\partial}{\partial t}=(r_1''+r_2'^2\sin r_1\cos r_1)\frac{\partial}{\partial r_1}+(r_2''-2r_1'r_2'\operatorname{tg}r_1)\frac{\partial}{\partial r_2}. \tag{6.77}$$

设 $M(t)$ 是 S^{n-1} 中等参函数 t 的水平超曲面，它的平均曲率向量为 H_1，

$$H_1=((p-1)\operatorname{tg}t-(q-1)\operatorname{ctg}t)\frac{\partial}{\partial t},$$

那末

$$-f^*H_1=((q-1)\operatorname{ctg}t-(p-1)\operatorname{tg}t)\left(r_1'\frac{\partial}{\partial r_1}+r_2'\frac{\partial}{\partial r_2}\right) \tag{6.78}$$

设 B_2 是 S^{m-1} 中等参映照 r 的纤维子流形 $M(\gamma_1, \gamma_2)$ 的第二基本形式，$\{E_i, E_a\}=\left\{\frac{e_i}{\cos t}, \frac{e_a}{\sin t}\right\}$ 是 $M(t)$ 的幺正标架场，其中 $e_i\in TS^{p-1}$，$e_a\in TS^{q-1}$。由直接计算可得

$$\left\langle\nabla_{f_*\frac{e_i}{\cos t}}f_*\frac{e_i}{\cos t}, \frac{\partial}{\partial r_1}\right\rangle=\frac{\lambda_1\sin r_1\cos r_1\cos^2 r_2}{\cos^2 t},$$

$$\left\langle\nabla_{f_*\frac{e_i}{\cos t}}f_*\frac{e_i}{\cos t}, \frac{1}{\cos r_1}\frac{\partial}{\partial r_2}\right\rangle=\frac{\lambda_1\cos r_1\sin r_2\cos r_2}{\cos^2 t},$$

$$\left\langle \nabla_{f_* \frac{e_a}{\sin t}} f_* \frac{e_a}{\sin t}, \frac{\partial}{\partial r_1} \right\rangle = -\frac{\lambda_3 - \lambda_2 \sin^2 r_2}{\sin^2 t} \sin r_1 \cos r_1,$$

$$\left\langle \nabla_{f_* \frac{e_a}{\sin t}} f_* \frac{e_a}{\sin t}, \frac{1}{\cos r_1} \frac{\partial}{\partial r_2} \right\rangle = -\frac{\lambda_2 \cos r_1}{\sin^2 t} \sin r_2 \cos r_2.$$

据此，我们有

$$\begin{aligned}
&B_2(f_* E_t, f_* E_t) + B_2(f_* E_a, f_* E_a) \\
&= \left\langle \nabla_{f_* \frac{e_t}{\cos t}} f_* \frac{e_t}{\cos t}, \frac{\partial}{\partial r_1} \right\rangle \frac{\partial}{\partial r_1} \\
&\quad + \left\langle \nabla_{f_* \frac{e_t}{\cos t}} f_* \frac{e_t}{\cos t}, \frac{1}{\cos r_1} \frac{\partial}{\partial r_2} \right\rangle \frac{1}{\cos r_1} \frac{\partial}{\partial r_2} \\
&\quad + \left\langle \nabla_{f_* \frac{e_a}{\sin t}} f_* \frac{e_a}{\sin t}, \frac{\partial}{\partial r_1} \right\rangle \frac{\partial}{\partial r_1} \\
&\quad + \left\langle \nabla_{f_* \frac{e_a}{\sin t}} f_* \frac{e_a}{\sin t}, \frac{1}{\cos r_1} \frac{\partial}{\partial r_2} \right\rangle \frac{1}{\cos r_1} \frac{\partial}{\partial r_2} \\
&= \left(\frac{\lambda_1 \cos^2 r_2}{\cos^2 t} - \frac{\lambda_3 - \lambda_2 \sin^2 r_2}{\sin^2 t} \right) \sin r_1 \cos r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} \\
&\quad + \left(\frac{\lambda_1}{\cos^2 t} - \frac{\lambda_2}{\sin^2 t} \right) \sin r_2 \cos r_2 \frac{\partial}{\partial r_2}.
\end{aligned} \tag{6.79}$$

将(6.77)式、(6.78)式和(6.79)式代入(6.5)式得到下列方程组

$$\begin{cases}
r_1'' + r_2'^2 \sin r_1 \cos r_1 + [(q-1)\operatorname{ctg} t - (p-1)\operatorname{tg} t] r_1' \\
\quad + \left(\dfrac{\lambda_1 \cos^2 r_2}{\cos^2 t} - \dfrac{\lambda_3 - \lambda_2 \sin^2 r_2}{\sin^2 t} \right) \sin r_1 \cos r_1 = 0, \\
r_2'' - 2 r_1' r_2' \operatorname{tg} r_1 + [(q-1)\operatorname{ctg} t - (p-1)\operatorname{tg} t] r_2' \\
\quad + \left(\dfrac{\lambda_1}{\cos^2 t} - \dfrac{\lambda_2}{\sin^2 t} \right) \sin r_2 \cos r_2 = 0, \\
0 < t < \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant r_1, r_2 \leqslant \dfrac{\pi}{2}.
\end{cases} \tag{6.80}$$

如果我们假定

$$\lim_{t \to 0} r_1(t) = 0 \text{ 以及 } \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} r_1(t) = \frac{\pi}{2} \left(\text{或} \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} r_2(t) = \frac{\pi}{2} \right), \tag{6.81}$$

那末，f 可连续地延拓到整个球 S^{n-1} 上。

不难验证，f 的能量泛函（差一个常数因子）为

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r_1'^2 r_2'^2 \cos^2 r_1 + \frac{\lambda_1 \cos^2 r_1 \cos^2 r_2}{\cos^2 t} \right.$$

$$+\frac{\lambda_2\cos^2 r_1\sin^2 r_2+\lambda_3\sin^2 r_1}{\sin^2 t}\Big)v\,dt, \qquad (6.82)$$

其中 $v=\cos^{p-1}t\sin^{q-1}t$。

所以，由(6.80)式和(6.81)式的解按(6.76)式定义的映照 $f: S^{n-1}\to S^{m-1}$ 是连续的，并且在 $S^{n-1}\setminus S^{p-1}\cup S^{q-1}$ 上是光滑调和映照。和6.4.1中一样，f 的弱调和性可扩充到 S^{n-1} 关于等参函数 t 的焦流形 S^{p-1} 和 S^{q-1} 上，因此得到 S^{n-1} 到 S^{m-1} 的连续弱调和映照。根据主正则性定理，它一定是光滑的。这样，就将问题归结为(6.80)式与(6.81)式的求解问题。

定义

$$X=\Big\{r=(r_1(t),\ r_2(t)):\ \Big(0,\ \frac{\pi}{2}\Big)\to\mathbb{R}^2,$$

$$\|r\|^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r_1^2+r_1'^2+r_2^2+r_2'^2)v\,dt<\infty\Big\}.$$

它是一个希尔伯特空间。当 $p>2$, $q>2$ 时，能量泛函(6.82)是有意义并且是光滑的，如果允许它取 $+\infty$，那末它对 $p=2$ 或 $q=2$ 同样可以定义。考虑 X 中的凸闭子集

$$X_0=\Big\{r\in X;\ \text{并当 } 0<t<\frac{\pi}{2} \text{ 时 } 0\leqslant r_1(t),\ r_2(t)\leqslant\frac{\pi}{2}\Big\}.$$

用前面证明引理6.10以及引理6.22类似的方法可以得到下面的引理。

引理 6.28 常微分方程组有解 $r_0\in X_0$。

我们再来分析解的边界性态。设 $\operatorname{tg} t=e^s$ 并且记 $r_i(t)=r_i(\operatorname{arc\,tg} e^s)$ 为 $A_i(s)$。那末，方程(6.80)改写为

$$\frac{d^2A_1}{ds^2}+\Big(\frac{dA_2}{ds}\Big)^2\sin A_1\cos A_1+\frac{(q-2)e^{-s}-(p-2)e^s}{e^s+e^{-s}}\frac{dA_1}{ds}$$

$$+\frac{\lambda_1e^s\cos^2A_2-e^{-s}(\lambda_3-\lambda_2\sin^2A_2)}{e^s+e^{-s}}\sin A_1\cos A_1=0,$$

$$(6.83)$$

$$\frac{d^2A_2}{ds^2}-2\frac{dA_1}{ds}\frac{dA_2}{ds}\operatorname{tg}A_1+\frac{(q-2)e^{-s}-(p-2)e^s}{e^s+e^{-s}}\frac{dA_2}{ds}$$

$$+\frac{\lambda_1 e^s - \lambda_2 e^{-s}}{e^s + e^{-s}} \sin A_2 \cos A_2 = 0, \tag{6.84}$$

其中 $s \in \mathbb{R}$。

设 $r = (r_1(t), r_2(t)) \in X_0$ 是方程(6.80)的解，它的二个分量都不是常数。它对应于方程组 (6.83) 与 (6.84) 的解是 $A(s) = (A_1(s), A_2(s))$，首先，注意到

$$0 < A_i(s) < \frac{\pi}{2}, \tag{6.85}$$

否则，如果存在 $\bar{s} \in \mathbb{R}$，使 $A_i(\bar{s}) = 0$，那末从方程(6.83)和 (6.84) 必有 $A_i'(\bar{s}) \neq 0$，因此 A_i 将取负值而与 $r \in X_0$ 相矛盾。类似地 A_i 也不取值 $\frac{\pi}{2}$。

如果 $A_i'(s)$ 不变号必有界，那末从 (6.83) 式和 (6.84) 式知 $A_i''(s)$有界，从而 $A_i'(s)$一致连续，那末从(6.85)式得到 $\lim\limits_{s\to\infty} A'(s) = 0$。当 $s \to -\infty$ 时也有类似的结论。

下面，我们假定 $\lambda_3 \geqslant \lambda_2$。

如果对充分大的 $\bar{s}$，有 $A_1'(\bar{s}) \leqslant 0$，从(6.83)式有 $A_1''(\bar{s}) < 0$，所以，对任何 $s > \bar{s}$，$A_1'(s) < 0$。否则，对所有充分大的 s，$A_1'(s)$保持恒正。并由前面讨论知当 s 充分大时，$|A_1'(s)| < \varepsilon$。

下面来说明 $A_1'(s)$ 在 s 充分大时，保持负号是不可能的。为此，将(6.83)式改写成

$$\frac{A_1''}{A_1'} + \frac{(q-2)e^{-s} - (p-2)e^s}{e^s + e^{-s}}$$
$$= \frac{-(A_2')^2(e^s + e^{-s}) - \lambda_1 e^s \cos^2 A_2 + e^{-s}(\lambda_3 - \lambda_2 \sin^2 A_2)}{(e^s + e^{-s})A_1'}$$
$$\cdot \sin A_1 \cos A_1. \tag{6.86}$$

设

$$P(s) = 2\left[\frac{A_1''}{A_1'} + \frac{(q-2)e^{-s} - (p-2)e^s}{e^s + e^{-s}}\right]$$

和

$$Q(s) = 2\,\frac{-(A_2')^2(e^s + e^{-s}) - \lambda_1 e^s \cos^2 A_2 + e^{-s}(\lambda_3 - \lambda_2 \sin^2 A_2)}{(e^s + e^{-s})A_1'}$$
$$\cdot \sin A_1 \cos A_1.$$

那末

$$P(s)=Q(s),$$

并且 $\overline{Y}(s)\equiv 1$ 是下列线性方程

$$Y'(s)+P(s)Y(s)=Q(s)$$

的解。它的通解为

$$\overline{Y}(s)=\frac{\int_{\bar{s}}^{s}Q(y)\exp\left(\int_{\bar{s}}^{y}P(x)dx\right)dy+c}{\exp\left(\int_{\bar{s}}^{s}P(x)dx\right)}=\frac{N(s)}{D(s)},$$

其中 $\bar{s}$, $c\in\mathbb{R}$ 是任意常数。由直接计算可知

$$D(s)=(A_1')^2(1+e^{-2s})^{2-p}(1+e^{2s})^{2-q},$$

$$N(s)=\int_{\bar{s}}^{s}\left[-(A_2')^2-\frac{\lambda_1 e^y\cos^2 A_2-(\lambda_3-\lambda_2\sin^2 A_2)e^{-y}}{e^y+e^{-y}}\right]$$

$$\cdot(1+e^{-2y})^{2-p}(1+e^{2y})^{2-q}(\sin 2A_1)A_1'dy. \qquad (6.87)$$

所以

$$N(s)=D(s)>0,$$

并当 s 趋向于无穷大时 $N(s)$ 趋向于零。又如果 $A_1'<0$，那末，从(6.87)式知道，s 充分大时，$N'(s)>0$。这个矛盾说明 $s\to\infty$ 时，$A_1'(s)$ 恒正。据此，并对方程(6.84)作类似的讨论得到结论：$s\to\infty$ 时，$A_2'(s)>0$。

下面再讨论 $s\to-\infty$ 时的情形。

首先，注意到如果有绝对值充分大的负数 $\bar{s}$，使 $A_2'(\bar{s})=0$，方程(6.84)意味着 $A_2''(s)>0$。所以，$A_2'(s)$对绝对值充分大的负数保持定号。因此，有下列可能性：

1) 对绝对值充分大的负数 $\bar{s}$ 有 $A_1'(\bar{s})\leqslant 0$ 以及任何 $s<\bar{s}$ 有 $-\varepsilon<A_2'(s)<0$。这时，方程(6.83)说明 $A_1''(\bar{s})>0$，从而，对所有 $s<\bar{s}$ 有 $A_1'(s)<0$。和前面一样，$N(s)$当 $s\to-\infty$ 时趋向于零，但(6.87)式却意味着 $N'(s)<0$，得到矛盾。

2) 当 $s\to-\infty$ 时，$0<A_1'(s)<\varepsilon$ 以及 $-\varepsilon<A_2'(s)<0$。方程(6.84)可写为

$$\frac{A_2''}{A_2'}+\frac{(q-2)e^{-s}-(p-2)e^{s}}{e^{s}+e^{-s}}$$
$$=2A_1'\operatorname{tg}A_1-\frac{\lambda_1e^{s}-\lambda_2e^{-s}}{(e^{s}+e^{-s})A_2'}\sin A_2\cos A_2.$$

据此，考虑线性方程

$$Y'(s)+\bar{P}(s)Y(s)=\bar{Q}(s),\tag{6.88}$$

其中

$$\bar{P}=2\left(\frac{A_2''}{A_2'}+\frac{(q-2)e^{-s}-(p-2)e^{s}}{e^{s}+e^{-s}}\right)$$

和

$$\bar{Q}=2\left(A_1'\operatorname{tg}A_1-\frac{\lambda_1e^{s}-\lambda_2e^{-s}}{(e^{s}+e^{-s})A_2'}\sin A_2\cos A_2\right),$$

所以 $Y(s)\equiv1$ 是方程(6.88)的解，即

$$Y(s)\equiv1=\frac{\bar{N}(s)}{\bar{D}(s)},$$

其中

$$\bar{D}(s)=(A_2')^2(1+e^{-2s})^{2-p}(1+e^{2s})^{2-q},$$
$$\bar{N}(s)=\int_{\bar{s}}^{s}\left(2A_1'(\operatorname{tg}A_1)(A_2')^2-\frac{\lambda_1e^{y}-\lambda_2e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}}A_2'\sin2A_2\right)\cdot(1+e^{-2y})^{2-p}(1+e^{2y})^{2-q}dy,\tag{6.89}$$

所以，$\bar{N}(s)>0$，并且 $\bar{N}'(s)<0$。又由于 $A_2'(s)$ 当 $s\to-\infty$ 时，趋于零而导致 $D(s)$ 以及 $N(s)$ 趋向于零，也得到矛盾。

3) 如对绝对值充分大的负数 $\bar{s}$ 有 $A_1'(\bar{s})\leqslant0$，但同时对 $s<\bar{s}$ 有 $0<A_2'(s)<\varepsilon$。方程(6.83)说明 $A_1''(\bar{s})>0$，因此，当 $s<\bar{s}$ 时，$-\varepsilon<A_1'(s)<0$。那末，(6.87)式说明 $N'(s)<0$，但当 $s\to-\infty$ 时，$N(s)$ 随 $A_1'(s)$ 趋于零而趋向于零，从而导致矛盾。

上述讨论说明 $s\to-\infty$ 时唯一的可能性是 $A_1'(s)>0$ 以及 $A_2'(s)>0$。

从 $A_i(s)$ 当 $s\to\pm\infty$ 时的单调性即知 $\lim\limits_{s\to\pm\infty}A_i(s)$ 的存在性。

如果 $\lim\limits_{s\to\infty}A_2(s)\neq\frac{\pi}{2}$，那末存在 $\varepsilon_0>0$，当 $\bar{s}$ 充分大时，$\cos A_2(\bar{s})>\varepsilon_0$；另一方面，对任何 $\varepsilon>0$ 和 $s_0>0$，总存在 $\bar{s}>s_0$，使 $A_1'(\bar{s})$

$<\varepsilon$, 以及 $-\varepsilon<A_i''(\bar{s})<\varepsilon$. 在这种点考虑方程 (6.83) 必得到 $\lim\limits_{s\to\infty} A_i(s)=\dfrac{\pi}{2}$. 类似地可证 $\lim\limits_{s\to\infty} A_i(s)=0$. 综合上面讨论,我们得到了下面的引理.

引理 6.29 假定 $\lambda_3\geqslant\lambda_2$. 如果 $r=(r_1, r_2)\in X$, 是方程(6.80)的解,并且 r_1 和 r_2 都不是常数,那末, $A_i(s)=r_i(\operatorname{arc\,tg} e^s)$ 是方程(6.83)和(6.84)的解. 并且 $s\to\pm\infty$ 时, $A_i'(s)>0$ 以及

1) $\lim\limits_{s\to-\infty} A_i(s)=0$,

2) $\lim\limits_{s\to\infty} A_1(s)=\dfrac{\pi}{2}$ 和 $\lim\limits_{s\to\infty} A_2(s)=\dfrac{\pi}{2}$ 中至少有一等式成立.

不难看出,方程(6.80)的常数解只可能是 $(0, 0)$, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ 以及 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. 如果假定 $\lambda_3\geqslant\lambda_2$, 那末 $E\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)=E\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)=E\left(\dfrac{\pi}{2}, r_2\right)\geqslant E\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$; 如果我们再假定 $\lambda_2(p-2)\geqslant\lambda_1(q-2)$, 那末, $E\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)\geqslant E(0, 0)$. 这样, 根据引理 6.28, 能量泛函的临界点 $(0, 0)$ 的不稳定性将导致方程(6.80)非常值解的存在性.

考虑能量泛函在临界点 $(0, 0)$ 点的第二变分.

$$
\begin{aligned}
I_1(u, u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[&u_1'^2+u_1^2\left(\frac{\lambda_3}{\sin^2 t}-\frac{\lambda_1}{\cos^2 t}\right)\\
&+u_2'^2+u_2^2\left(\frac{\lambda^2}{\sin^2 t}-\frac{\lambda_1}{\cos^2 t}\right)\Big]v\,dt,
\end{aligned}
$$

其中 $u=(u_1, u_2)\in X$. 运用前面 6.4.2 节类似的方法, 我们可以得到下面的结论.

定理 6.30 假定 $\lambda_3\geqslant\lambda_2$ 和 $\lambda_2(p-2)\geqslant\lambda_1(q-2)$, 如果

1) $4\lambda_1>(p-2)^2$,

或者

2) $4\lambda_1\leqslant(p-2)^2$ 并且 $\sqrt{(p-2)^2-4\lambda_1}+\sqrt{(q-2)^2+4\lambda_2}<p+q-4$. 那末,方程(6.80)有非常值解.

方程也可以有部分常数解$(0,\ r_2)$，$(r_1,\ 0)$或$\left(\bar{r}_1,\ \frac{\pi}{2}\right)$，其中$r_1, \bar{r}_1$和$r_2$不是常数，并分别满足下列方程

$$\left.\begin{aligned}&\bar{r}_1'' + [(q-1)\operatorname{ctg} t - (p-1)\operatorname{tg} t]\bar{r}_1' \\ &\quad + \left(\frac{\lambda_1}{\cos^2 t} - \frac{\lambda_3}{\sin^2 t}\right)\sin r_1 \cos r_1 = 0 \\ &\bar{r}_1'' + [(q-1)\operatorname{ctg} t - (p-1)\operatorname{tg} t]\bar{r}_1' \\ &\quad - \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\sin^2 t}\sin \bar{r}_1 \cos \bar{r}_1 = 0\end{aligned}\right\} \tag{6.90}$$

$$\begin{aligned}&\bar{r}_2'' + [(q-1)\operatorname{ctg} t - (p-1)\operatorname{tg} t]\bar{r}_2' \\ &\quad + \left(\frac{\lambda_1}{\cos^2 t} - \frac{\lambda_2}{\sin^2 t}\right)\sin r_2 \cos r_2 = 0\end{aligned} \tag{6.91}$$

由于$\lambda_3 \geqslant \lambda_2$，$E(r_1,\ 0) \geqslant E(0,\ r_2)$。根据定理6.9，方程(6.90)无常数解。一般地，$\inf\limits_{r=(r_1,r_2)\in X} E(r_1,\ r_2) \leqslant E(0,\ r_2)$，如果有严格不等式，那末，(6.76)式的确定义了不同于Smith构造的新的调和映照。综合上面讨论，得到下列结果。

定理6.31[136] 假定$\lambda_3 \geqslant \lambda_2$和$\lambda_2(p-2) \geqslant \lambda_1(q-2)$。如果

1) $4\lambda_1 > (p-2)^2$,

或者

2) $4\lambda_1 \leqslant (p-2)^2$并且$\sqrt{(p-2)^2 - 4\lambda_1} + \sqrt{(q-2)^2 + 4\lambda_2} < p + q - 4$。那末，(6.76)式给出了一个调和映照。进而，如果r_2是方程(6.91)的非常数解，$(0,\ r_2)$是不稳定的，那末，方程(6.80)满足边界条件(6.81)有解，这就得到了S^{n-1}到S^{m-1}的新的调和映照。

注1 下边给出一个具体的例子，说明定理6.31的确可以给出新的调和映照。设$p = q = 5$，$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = q - 1 = 4$。方程(6.91)有一个解$r_2 = t$。那末，能量泛函在$(0,\ r_2)$点的第二变分公式为

$$\begin{aligned}I(u,\ u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[&u_1'^2(1 - r_1'^2) + u_1^2\left(\frac{\lambda_3 - \lambda_2 \sin^2 r_2}{\sin^2 t} - \frac{\lambda_1 \cos^2 r_2}{\cos^2 t}\right) \\ &+ u_2'^2 + u_2^2\left(\frac{\lambda_2}{\sin^2 t} - \frac{\lambda_1}{\cos^2 t}\right)\cos^2 r_2\Big]v\,dt,\end{aligned}$$

取，$u_1 = \sin t \cos^{-1} t$，$u_2 = 0$，那末，

$$I(u, u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^4 t dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\cos^2 t dt$$

$$=\frac{3}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\cos^2 t dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\cos^2 t dt<0,$$

这意味着方程(6.91)的这个解是不稳定的。

注 2 本节中得到的化约方程(6.80)是二个未知函数的常微分方程组。我们在解 B^{m+1} 到 S^n 的调和映照的等变边值问题中，得到的化约方程是一个未知函数两个自变量的偏微分方程。我们也可用变分直接法来解化约得到的偏微分方程，具体请见文献[136]。

§6.6 射影空间间的调和映照

复(四元)射影空间和球面密切相关。从球面上的等参函数，运用命题6.2，如果它关于$S^1(S^3)$作用不变，就得到了$CP^{n-1}(QP^{n-1})$上的等参函数。这样，我们就可以构造射影空间间的等变调和映照。Urakawa[117]利用复射影空间中余齐性为1的群作用，将调和性方程化约，得到了复射影空间间的调和映照。这里，我们用这一章的头二节建立起来的框架，来得到射影空间间的调和映照。下面对四元射影空间进一步讨论。类似地，同样可得复射影空间的情形。

设 π_2: $S^{4n-1}\to QP^{n-1}$ 是以 S^3 为纤维的通常的 Riemann 浸没。对任何 $Z\in S^{4n-1}$ 可表示为

$$Z=(X\cos t, Y\sin t),\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$$

其中 $X\in S^{4p-1}$, $Y\in S^{4q-1}(p+q=n)$, t 是 S^{4n-1} 上的等参函数，它关于 Riemann 浸没 π 是等变的，诱导了 QP^{n-1} 上的等参函数。它的水平超曲面是

$$M_t=S^{4p-1}(\cos t)\times S^{4q-1}(\sin t)/S^3,$$

焦流形是 QP^{p-1}, QP^{q-1}。

在任一焦流形上取一点，如 $A\in QP^{p-1}$，从 A 出发作垂直于 QP^{p-1} 的测地线。它必落在过 A 并且和 QP^{p-1} 垂直的某条四元射影直线上。因而，那些四元射影直线是分布 $\{n=\text{grad}\,t,\ J_1n,\ J_2n,\ J_3n\}$ 的积分流形，其中 $\{J_1,\ J_2,\ J_3\}$ 是 QP^{n-1} 中的四元 Kähler 结构。考虑到 $QP^1=S^4\left(\frac{1}{2}\right)$，具常截面曲率 4，并且是 QP^{n-1} 中全测地子流形，所以 $n=\text{grad}\,t$ 的积分曲线是 QP^1 中的测地线。QP^1 在极坐标下有度量形式

$$dt^2+\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2\psi^2,$$

其中 ψ^2 是 S^3 的标准度量。我们有

$$n=\frac{\partial}{\partial t},\ 以及\ J_in=\frac{2}{\sin 2t}v_i,\quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

其中 v_i 是与 t 无关的向量。因此，

$$\nabla_{J_in}n=2(\text{ctg}\,2t)J_in.$$

这意味着 J_in 都是以 $-2\text{ctg}\,2t$ 为主曲率的主方向。

我们来计算 QP^{n-1} 中水平超曲面的所有主曲率。首先约定下列指标取值范围：

$$1\leqslant s,\ t\cdots\leqslant 4n-8;\ 1\leqslant s',\ t',\ \cdots\leqslant 4n-5,$$
$$\lambda,\ \mu,\ \nu=1,\ \cdots,\ 4n-5,\ 4n-3,\ 4n-2,\ 4n-1;$$
$$i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3$$

对任何 $p\in M_t$，沿着 M_t，取 QP^{n-1} 的幺正标架场 $\{e_s,\ e_{4n-7}=J_1e_{4n-4},\ e_{4n-6}=J_2e_{4n-4},\ e_{4n-5}=J_3e_{4n-4},\ e_{4n-4}\}$，使 $e_{s'}\in T_pM_t$，$e_{4n-4}=\dfrac{\partial}{\partial t}\in N_pM_t$。我们有

$$J_1e_{4n-7}=-e_{4n-4},\ J_2e_{4n-7}=-e_{4n-5},\ J_3e_{4n-7}=e_{4n-6},$$
$$J_1e_{4n-6}=e_{4n-5},\quad J_2e_{4n-6}=-e_{4n-4},\ J_3e_{4n-6}=-e_{4n-7},$$
$$J_1e_{4n-5}=-e_{4n-6},\ J_2e_{4n-5}=e_{4n-7},\quad J_3e_{4n-5}=-e_{4n-4}.$$

在 S^{4n-1} 的对应点 $\bar{p}=\pi^{-1}(p)$ 取下列幺正标架场

$$\{\tilde{e}_{s'},\ \tilde{e}_{4n-4},\tilde{e}_{4n-4+i}=\tilde{J}_i\tilde{e}_{4n}\},$$

其中 $\pi_*\tilde{e}_{s'}=e_{s'},\pi_*\tilde{e}_{4n-4}=e_{4n-4},\tilde{e}_{4n}$ 是 S^{4n-4} 在 $Q^n\cong R^{4n}$ 中的位置

向量，$\mathcal{J}_t$ 是 $\mathbf{Q}^n$ 中的四元 Kähler 结构。

设 $h_{s't'}$ 是 M_t 在 QP^{n-1} 中的第二基本形式，$\tilde{h}_{\lambda\mu}$ 是 $\tilde{M}_t=\pi^{-1}(M_t)=S^{4p-1}(\cos t)\times S^{4q-1}(\sin t)$ 在 S^{4n-1} 中的第二基本形式。根据 Riemann 浸没的性质[85]，我们有

$$\tilde{h}_{s't'}=h_{s't'},\qquad \tilde{h}_{4n-7\ 4n-3}=-1,$$

$$\tilde{h}_{4n-6\ 4n-2}=-1,\qquad \tilde{h}_{4n-5\ 4n-1}=-1,$$

其他都为 0，即

$$\tilde{h}_{\lambda\mu}=\begin{pmatrix} h_{st} & h_{s\,4n-4-t} & & & & 0 & \\ & & & & -1 & 0 & 0 \\ h_{4n-4-t\ t} & h_{4n-4-t\ 4n-4-t} & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & -1 \\ & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

取 QP^{n-1} 中在 p 附近适当的幺正标架场，使 $h_{s't'}$ 在 p 点对角化，这样，上列矩阵化为

$$\tilde{h}_{\lambda\mu}=\begin{pmatrix} u_1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & & & 0 & \\ & & u_1 & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ 0 & & & & u_b & 0 & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & u_b & & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & & u_b & 0 & 0 & -1 \\ & & & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.92}$$

其中 $u_b=-2\operatorname{ctg}2t=\operatorname{tg}t-\operatorname{ctg}t$。设 u_i 的重数为 a_i。从(6.92)式得到 $\tilde{M}_t$ 在 S^{4n-1} 中的主方程为

$$(u_1-x)^{a_1}\cdots(u_b-x)^{a_b-3}\begin{vmatrix} u_b-x & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & u_b-x & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & u_b-x & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}=0,$$

即

$$(u_1-x)^{a_1}\cdots(u_b-x)^{a_b-3}(x^2-u_bx-1)^3=0.$$

而另一方面，从直接计算知，$\widetilde{M}_t$ 的主曲率为 $\operatorname{tg} t$，重数为 $4p-1$，以及 $-\operatorname{ctg} t$，重数为 $4q-1$，且注意到

$$(x^2-u_bx-1)^3=(x-\operatorname{tg} t)^3(x+\operatorname{ctg} t)^3,$$

所以，仅有的可能性是 $b=3, a_1=4p-4, a_2=4q-4, a_3=3$。综上讨论，我们有下面的命题。

命题 6.32 $M_t=S^{4p-1}(\cos t)\times S^{4q-1}(\sin t)/S^3$ 在 QP^{n-1} 中有三个不同主曲率 $\operatorname{tg} t, -\operatorname{ctg} t$ 以及 $\operatorname{tg} t-\operatorname{ctg} t$，它们的重数分别为 $4p-4, 4q-4$ 以及 3。

注 1 类似地，更简单地讨论可得 $M_t=S^{2p-1}(\cos t)\times S^{2q-1}(\sin t)/S^1$ 在 CP^{n-1} 中有三个不同主曲率 $\operatorname{tg} t, -\operatorname{ctg} t$ 以及 $\operatorname{tg} t-\operatorname{ctg} t$，它们的重数分别为 $2p-2, 2q-2$ 以及 1。

注 2 上面讨论中的标架场 $\{e_a\}$ 可按下列方式选取。对任何 $Z\in M_t$，过 Z 作正交于 M_t 的测地线 $r(t)$ 交 QP^{p-1} 于 A，交 QP^{q-1} 于 B，取 A 点附近 QP^{p-1} 的局部幺正标架场，以及 B 点附近的 QP^{q-1} 的局部幺正标架场，分别将它们沿着测地线 $r(t)$ 平行移动到 $Z\in M_t$ 点。

6.6.1 从 QP^{n-1} 到 S^{m-1} 的调和映照

设 $f_1: QP^{p-1}\to S^{\alpha-1}, f_2: QP^{q-1}\to S^{\beta-1}$ 是能量密度为 $\lambda_1/2$ 和 $\lambda_2/2$ 的调和映照。将它们与 Riemann 浸没复合得到 $\hat{f}_1=f_1\circ\pi: S^{4p-1}\to S^{\alpha-1}, \hat{f}_2=f_2\circ\pi$。根据定理 6.3，它们都是调和映照。容易看出 $e(\hat{f}_1)=e(f_1)=\lambda_1/2, e(\hat{f}_2)=e(f_2)=\lambda_2/2$。那末，按 §6.4 介绍的 Smith 方法，可得到调和映照 $\hat{f}: S^{4n-1}\to S^{m-1}$，其中 $\alpha+\beta$

$=m$。

众所周知，任何到球面具有常数能量密度为 $\lambda_1/2$ 的调和映照，被出发流形上 Laplace 算子以 λ_1 为特征值的特征函数所实现。已知 QP^{p-1} 上 Laplace 算子的特征值是 $4k_1(k_1+p)$，$k_1=0,1,2,\cdots$，所以，我们得到下面定理。

定理 6.33 假定 $\lambda_1(2q-1)\leqslant\lambda_2(2p-1)$。如果

1) $(2p-1)^2<\lambda_1$，

或 2) $(2p-1)^2\geqslant\lambda_1$ 并且 $\sqrt{(2p-1)^2-\lambda_1}+\sqrt{(2q-1)^2+\lambda_2}<2n-2$。那末，对 $\lambda_1=4k_1(k_1+p)$ 以及 $\lambda_2=4k_2(k_2+q)$，$k_1,k_2=0,1,\cdots$，由(6.31)式，(6.32)式和(6.33)式所确定的映照 $\hat{f}$：$S^{4n-1}\to S^{m-1}$ 诱导了调和映照 f：$QP^{n-1}\to S^{m-1}$。

6.6.2 从 QP^{n-1} 到 QP^{m-1} 的调和映照

设 f_1：$QP^{p-1}\to QP^{\alpha-1}$，$f_2$：$QP^{q-1}\to QP^{\beta-1}$，$f_3$：$S^3\to S^3$ 是分别具有常数能量密度 $\lambda_1/2$，$\lambda_2/2$ 和 $\lambda_3/2$ 的调和映照。设 t 是如前所述的以 QP^{p-1} 和 QP^{q-1} 为焦流形的等参函数，相应地 r 是 QP^{m-1} 中以 $QP^{\alpha-1}$ 和 $QP^{\beta-1}$ 为焦流形的等参函数。

对任何 $Z\in QP^{n-1}\backslash QP^{p-1}\cup QP^{q-1}$，存在唯一的水平超曲面 $M_t=S^{4p-1}(\cos t)\times S^{4q-1}(\sin t)/S_3$，使 $Z\in M_t$。从 Z 出发作正交于 M_t 的测地线 $\gamma(t)$ 交 QP^{p-1} 于 $Z_1=\gamma(0)$，交 QP^{q-1} 于 $Z_2=\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$。应用映照 f_1 和 f_2，得到 $Z_1'=f_1(Z_1)\in QP^{\alpha-1}$，$Z_2'=f_2(Z_2)\in QP^{\beta-1}$。注意到存在连结 Z_1' 和 Z_2' 的测地线(并且唯一)，它是 $\operatorname{grad} r$ 的积分曲线。这测地线决定了唯一的四元射影直线 $QP^1\cong S^4\left(\frac{1}{2}\right)$，它和水平超曲面 M_r 相交于 $S^3\left(\frac{1}{2}\sin 2r\right)$，类似地，$Z$ 确定了 $S^3\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)$ 上的一点 Z_3。应用映照 f_3 得到 $Z_3'=f_3(Z_3)$。假定 $r(t):\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$是待定光滑函数。定义光滑映照 $f:QP^{n-1}\backslash QP^{q-1}\cup QP^{q-1}\to QP^{m-1}$ 如下

$$f(Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ t)=\begin{cases}(Z_1',\ Z_2',\ Z_3',\ r(t)), & \text{如果}\ r\neq 0,\ \dfrac{\pi}{2}\\ (Z_1',\ 0,\ 0,\ 0), & \text{如果}\ r=0\\ \left(0,\ Z_2',\ 0,\ \dfrac{\pi}{2}\right), & \text{如果}\ r=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\tag{6.93}$$

如果$r(t)$满足条件：

$$\lim_{t\to 0} r(t)=0\ \text{和}\ \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} r(t)=\frac{\pi}{2},\tag{6.94}$$

那末，上述定义的映照可连续地延拓到焦流形而成为定义在整个QP^{n-1}上的映照，我们仍记它为 f：

$$f(Z)=\begin{cases}\text{由(6.93)式所定义}, & \text{如果}\ Z\in QP^{n-1}/QP^{p-1}\cup QP^{q-1}\\ f_1(Z), & \text{如果}\ Z\in QP^{p-1}\\ f_2(Z), & \text{如果}\ Z\in QP^{q-1}.\end{cases}\tag{6.95}$$

如果 f 在 $QP^{n-1}\backslash QP^{p-1}\cup QP^{q-1}$ 上是调和的，那末，和前面一样可说明 f 在 QP^{n-1} 上是弱调和映照，再由主正则性定理，f 是光滑映照。这样，我们可用定理 6.3 来得到 f 在$QP^{n-1}\backslash QP^{p-1}\cup QP^{q-1}$ 的调和性。首先，它在水平超曲面上诱导了映照 $f^{\perp}$: $M_t\to M'_{r(t)}$。

命题 6.34 映照 $f^{\perp}$ 是调和的。

证明 对任何 $Z\in M_t$，作过 Z 并且和 M_t 正交的测地线$\gamma(t)$，交 QP^{p-1} 于 A，交 QP^{q-1} 于 B。取 A 附近 QP^{p-1} 的局部幺正标架场$\{e_a\}$ $(a=1,\ \cdots,\ 4p-4)$ 和 B 附近 QP^{q-1} 的局部幺正标架场 $\{e_\alpha\}$ $(\alpha=4p-3,\ \cdots,\ 4n-8)$。将它们延着 $\gamma(t)$平行移动到 Z，得到$\{E_a\}$和$\{E_\alpha\}$。容易看出

$$E_a=\frac{1}{\cos t}\,e_a,\ E_\alpha=\frac{1}{\sin t}\,e_\alpha.$$

令 $E_{4n-8+i}=J_i\dfrac{\partial}{\partial t}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$。$\{E_a,\ E_\alpha, E_i\}$构成 M_t 附近的局部幺正标架场。注意到$\left\{\dfrac{\partial}{\partial t},\ J_i\dfrac{\partial}{\partial t}\right\}$是完全可积分布，它的积分

流形是 $QP^1=S^4$。因此 $E_{4n-3+i}=\dfrac{e_{4n-3+i}}{\frac{1}{2}\sin 2t}$，其中 e_{4n-3+i} 是 S^3 上幺正标架场。我们关于 $f^\perp$ 的调和性论断是从张力场 $\tau(f^\perp)$ 为 $\tau(f_1)$，$\tau(f_2)$ 和 $\tau(f_3)$ 的线性组合(以关于 t 的函数为系数)而得到。

这样，根据定理 6.3，f 在 $QP^{n-1}\backslash QP^{p-1}\cup QP^{q-1}$ 上的调和性，就归结成 $r(t)$ 满足的方程，下面来推导它。根据命题 6.32，M_t 在 QP^{n-1} 中的平均曲率为

$$H=(4p-1)\operatorname{tg} t-(4q-1)\operatorname{ctg} t, \tag{6.96}$$

并且

$$\begin{aligned}
&B'(f_*E_a,\ f_*E_a)+B'(f_*E_\alpha,\ f_*E_\alpha)+B'(f_*E_i,\ f_*E_i)\\
&=\frac{\operatorname{tg} r}{\cos^2 t}\langle f_*e_a,\ f_*e_a\rangle_{QP^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\\
&\quad-\frac{\operatorname{ctg} r}{\sin^2 t}\langle f_*e_\alpha,\ f_*e_\alpha\rangle_{QP^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\\
&\quad-\frac{2\operatorname{ctg} 2r}{\frac{1}{4}\sin^2 2t}\langle f_*e_i,\ f_*e_i\rangle_{QP^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\\
&=\frac{\operatorname{tg} r\cos^2 r}{\cos^2 t}\langle f_{1*}e_a,\ f_{1*}e_a\rangle_{QP^{p-1}}\frac{\partial}{\partial r}\\
&\quad-\frac{\operatorname{ctg} r\sin^2 r}{\sin^2 t}\langle f_{2*}e_\alpha,\ f_{2*}e_\alpha\rangle_{QP^{q-1}}\frac{\partial}{\partial r}\\
&\quad-\frac{2\operatorname{ctg} 2r\sin^2 2r}{\sin^2 2t}\langle f_{3*}e_i,\ f_{3*}e_i\rangle_{S^3}\frac{\partial}{\partial r}\\
&=\left(\frac{\lambda_1}{\cos^2 t}-\frac{\lambda_2}{\sin^2 t}\right)\sin r\cos r\frac{\partial}{\partial r}\\
&\quad-2\lambda_3\frac{\sin 2r\cos 2r}{\sin^2 2t}\frac{\partial}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{6.97}$$

将(6.96)式，(6.97)式代入(6.5)式得到方程

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2r}{dt^2}+\{(4q-1)\operatorname{ctg} t-(4p-1)\operatorname{tg} t\}\frac{dr}{dt}\\
&\quad+\left(\frac{\lambda_1}{\cos^2 t}-\frac{\lambda_2}{\sin^2 t}\right)\sin r\cos r
\end{aligned}$$

$$-2\lambda_3\frac{\sin 2r\cos 2r}{\sin^2 2t}=0. \tag{6.98}$$

用得到定理6.9类似的方法，我们有下面的定理。

定理6.35[135]　假定$\lambda_1(2q-1)\leqslant\lambda_2(2p-1)$，那末，方程(6.98)在边界条件(6.94)下有解的充分条件是

1) $(2p-1)^2<\lambda_1-\lambda_3$ 和 $0<\lambda_2-\lambda_3$，

或

2) $(2p-1)^2\geqslant\lambda_1-\lambda_3$，$0<\lambda_1-\lambda_3$，$0<\lambda_2-\lambda_3$

和

$$\sqrt{(2p-1)^2-\lambda_1+\lambda_3}+\sqrt{(2q-1)^2+\lambda_2+\lambda_3}$$
$$<2n-2.$$

它也是(6.95)式所定义的映照f: $QP^{n-1}\to QP^{m-1}$为调和的充分条件。

注1　我们举一个满足定理6.35的例子。设$p=q=2$。考虑$Qp^1=S^4$上三次球调和多调式，它给出了QP^1到S^{29}的能量密度为9的调和映照，它和$S^{29}\to RP^{29}\to QP^{29}$复合得到$\lambda_1=\lambda_2=18$的映照$f_1=f_2$: $QP^1\to QP^{29}$。设f_3: $S^3\to S^3$是等距映照，那末，$\lambda_3=3$。这个例子满足定理6.35的第1种条件。因此，定理给出了调和映照f: $QP^3\to QP^{62}$。

注2　类似的讨论，同样得到$CP^{n-1}\to CP^{m-1}$的调和映照。这时f_3: $S^1\to S^1$，$\lambda_3=k^2$，$k=0, 1, \cdots$。Urakawa在文献[117]中用复射影空间中余齐性为1的群作用，得到了化约方程。它和(6.98)式是同样类型的。我们这里介绍的方法，更清楚的揭示了方程(6.98)中系数的几何意义。

最后注记　当边界条件落在目标流形的测地凸邻域时，调和映照的边值问题是可解的[54]。否则，不能期望有一般的存在性定理。对有良好几何结构的流形，求等变"大边值"问题的解，近年来为大家所关注。在文献[14]、[15]、[33]、[45]、[46]、[47]、[68]、[136]和[145]中，他们研究了单位圆盘D^2或B^3(三维实心单位球体）到球面的等变调和映照的等变"大边值"问题。作者在文献

[139] 中研究了 B^3 到复射影空间 CP^2 等变调和映照的等变大边值问题，证明了整体解的存在性，并且证明它必演化成调和映照边值问题的解。这里，边界条件虽然有"良好"对称性，但大大越出测地凸邻域的范围。

参考文献

[1] Aiyama Reiko. The generalized Gauss maps of a spacelike submanifold with parallel mean curvature vector in a pseudo-Euclidean space.prepriat

[2] Ambrosetti A and Rabinowitz P H Dual variational method in critical point theory and applications.J, Functional Anal, 1973, 14:349～381

[3] Aronszajn N. A unique continuation theorem for solutons of elliptic partial differential equations or inequalities J Math Pure Appl, 1957, 36:235～249

[4] Aronszajn N, Krzywiiki A and Szarski J. A unique continuation theorem for exterior differential forms on Riemannian manifolds.Ark, Mat, 1962, 4:417～453

[5] Baird P. Harmonic maps with symmetry, harmonic morphism and deformation of metrics.Research Notes Math, 87 Pitman, 1983

[6] Baird P and Eells J. A conservation law for harmonic maps. Springer-Verlag Lecture Notes Math, 1981, 894:1～15

[7] Burns K.Convex supporting domain on surfaces.Bull.London Math Soc, 1985, 17:271～274

[8] Burstall F E. Harmonic maps of finite energy from non-compact manifolds. J London Math Soc(2), 1984, 30: 361～370

[9] Calabi E. On manifolds with non-negative Ricci curvature I. Notices A M S 22(A205), 1975

[10] Calabi E. Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations. Proc Symp Global Analysis U C Berkeley, 1968

[11] Calabi E and Vesentini E. On compact locally symmetric Kähler manifolds. Ann Math, 1960, 71:472～502

[12] Cartan E. Sur certaines forms riemanniennes remarquables

des geometries à groupe foundamental simple. Ann Sci Ecole Norm Sup, 1927, 44: 345～367

[13] Cartan E. Sur les domaines bornes homogénes de l'espace de n variables complexes. Abh Math Sem Univ Hamburg, 1935, 11: 116～162

[14] Chang Kung-Ching and Ding Wei-Yue. A result on the global existence for heat flows of harmonic maps from D^2 into S^2. Nemantics, J M Coron et ed. Kluwer Academic Publ, 1990, 37～48

[15] Chang Kung-Ching, Ding Wei-Yue and Ye Rugang. Finite-time blow-up of the heat flow of harmonic maps from surfaces. J Differential Geom, 1992, 36: 507～515

[16] 陈咸平. 调和映照和高斯映照 数学年刊 4A(4) (1983), 449～456

[17] Chen Q and Xin Y L. A generalized maximum principle and its applications in geometry. Amer. J Math, 1992, 114: 355～366

[18] Chen Y M and Ding W Y Blow-up and global existence for heat flows of harmonic maps. Invent Math, 1990, 99: 567～578

[19] Cheng S Y. Liouville theorem for harmonic maps. Proc, Sympo Pure Math A M S, 1980, 36: 147～151

[20] Cheng S Y and Yau S T. Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces. Ann Math, 1976, 104: 407～419

[21] Chern S S. On the curvature of a piece of hypersurfaces in Euclidean space. Abh Math Sem Univ Hamburg, 1965, 29: 77～91

[22] Chern S S and Goldberg S G. On volume decreasing properties of a class of real harmonic mappings. Amer J Math, 1975, 97: 133～147

[23] Coron J M and Ghidaglia J M. Explosion en tems fini pour-le flot des applications harmoniques. C R Acad Sci Paris 308 Ser(I), 1989, 339～344

[24] Coron J M and Guilliver R. Minimizing p-harmonic maps into spheres. J Reine Angew Math, 1989, 401: 82～100

[25] Cecil T E and Ryan P J. Tight and taut immersions of manifolds. Pitman Publ Inc, 1985

[26] Ding W Y. Symmetric harmonic maps between spheres. Commun Math Phys, 1988, 118: 641～649

[27] Ding W Y. Blow-up of solutions of heat flow for harmonic maps. Adv Math, 1990, 19: 80～92

[28] Ding Qing. The Dirichlet problem at infinity for manifolds of nonpositive curvature. Proc Symp Diff Geom in Honour of Professor Su Buchin on his 90th Birthday, World Sci Publ Co, 1993, 49～58

[29] Eells J and Sampson J H. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. Amer. J Math, 1964, 86: 106～160

[30] Eells J and Lemaire L. A report on harmonic maps. Bull London Math Soc, 1978, 10: 1～68

[31] Eells J and Lemaire L. Selected topics in harmonic maps. C B M S 50 A M S, 1983

[32] Eells J and Lemaire L. Another report on harmonic maps. Bull London Math Soc, 1988, 20(5): 385～524

[33] Eells J and Lemaire L. Examples of harmonic maps from disk to hemispheres. Math Z, 1984, 185: 517～519

[34] Eells J and Ratto A. Harmonic maps between spheres and ellipsoids. Internat. J Math, 1990, 1: 1～27

[35] Fisher-Colbrie D and Schoen R. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative curvature. Commun Pure Appl Math, 1980, XXXIII: 199～211

[36] Garber W D, Ruijsenaass. S N M, Seider E and Burns D On finite action solution of nonlinear σ-model. Ann Phys, 1979, 119

[37] Giaqunta Mand Guisti. E On the regularity of the minima of variational integrals. Acta Math, 1982, 148: 31～46

[38] Gordon. W B Convex functions and harmonic maps. Proc.A M S 33, 1972, 433~437

[39] Green R E and Wu H Function theory on manifolds which possess a pole. Springer-Verlag Lecture Notes Math 1979, 699

[40] Grove K, Karcher H and Ruh E A Jacobi field and Finsler metric on compact Lie group with applications to differential pinching problem.Math Ann, 1974, 211:7~21

[41] Grove K, Karcher H and Ruh E A Group action and curvature. Invent Math, 1976, 23:31~48

[42] Gu C H The extramal surfaces in 3-dimensional Minkowski space Acta Math Sinica(New Series),1985, 1:173~180

[43] Gu C H A global study of extramal surfaces in 3-dimensional Minkowski space.Springer-Verlag Lecture Notes Math, 1985, 1255:26~33

[44] Gu C H A class of boundary problem for extramal surfaces of mixed type in MInkowski 3-space. J Reine Angew Math, 1988, 385:195~202

[45] Grotowski.J F Harmonic map heat flow for axially symmetric data.Manus Math, 1991, 73(2):207~228

[46] Grotowski. J F Finite time blow-up for harmonic maps heat flow.Calc Var, 1993, 1:231~236

[47] Grotowski J F Concentrated boundary data and axially symmetric harmonic maps. J Geom. Anyl, 1993, 3(3):279~292

[48] Guest M Geometry of maps between generalized flag manifolds.J Diff Geom, 1987, 25:223~247

[49] Gulliver R On the variety of manifolds without conjugate points.Trans A M S. 1975, 210:185~201

[50] Hano J and Nomizu K Surfaces of revolution with constant mean curvature in Lorentz-Minkowski space. Tôhoku Math J, 1984, 36:427~437

[51] Hardt R and Lin F H Mappings minimizing the L^p norm of

the gradient. Commun Pure and Appl Math, 1987, Ⅱ: 555～583
[52] Helgason S Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces. Academic Press, 1978
[53] Hildebrandt S. Nonlinear elliptic systems and harmonic mappings. Proc Beijing Symp Diff Geom and Diff Equ v.1, Sci Press and Gordon and Breach, 1982, 481～615
[54] Hildebrandt S, Kaul H and Widman K. An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds. Acta Math, 1977, 138: 1～16
[55] Hoffeman D, Osserman R and Schoen R On Gauss map of complete surfaces of constant mean curvature in R^3 and R^4. Coment. Math Helv, 1982, 57: 519～531
[56] Howard R. The nonexistence of stable submanifolds, varifolds and harmonic maps in sufficientlly pinched simply connected Riemannian manifolds. Mich Math J, 1985, 32: 321～334
[57] Howard R and Wei W. Nonexistence of stable harmonic maps to and from certain homogenious spaces and submanifolds of Euclidean spaces. Trans A M S, 1986, 294: 319～331
[58] Hsiang W Y and Lawson H B. Minmal submanifolds of low cohomogeniety. J Diff Geom, 1971, 5: 1～38
[59] Hu. H S An nonexistence theorem for harmonic maps with slowly divergent energy. Chinese Ann Math, 1984, 5B(4): 737～740
[60] Hu S T. Homotopy theory. Academic Press, New York, 1957
[61] Hua L K. On the theory of automorphic functions of matric variables I: Geometric basis. Amer J Math, 1944, 66: 470～488
[62] 华罗庚. 多复变函数论中的典型域的调和分析. 科学出版社, 1963
[63] 黄宣国. 完备黎曼流形上的最大值原理. 数学年刊, 1993, 14(A), 2: 175～186
[64] Ishihara T. The harmonic Gauss maps in generalized sense.

J London Math Soc, 1982, 26: 104~112

[65] Ishihara T. Maximal spacelike submanifolds of a pseudoriemannian space of constant curvature. Michigan Math J, 1988, 35: 345~352

[66] Ishihara T. The index of a holomorphic mapping and the index theorem. Proc A M S, 1977, 66: 169~174

[67] Ishihara. S and Yano. K Harmonic and relative affine mappings. J Diff Geom, 1975, 10: 501~509

[68] Jäger M and Kaul H. Rotationally symmetric harmonic maps from ball into sphere and the regularity problem for weak solutions of elliptic systems. J Reine Angew Math, 1983, 343: 146~161

[69] Jin Z R and Kazdan J. On the rank of harmonic maps. Math Z, 1991, 207: 535~537

[70] Jorge L and Xavier F. An inequality between the exterior diameter and the mean curvature of bounded immersion. Math Z, 1981, 178: 77~82

[71] Karp L. Subharmonic functions on real and complex manifolds. Math Z, 1982, 179: 535~554

[72] Kazdan J. and Warner F. Prescribing curvature. Proc Symp Pure Math A M S, 1975, 27: 309~319

[73] Leung P F. On the stability of harmonic maps. Springer-Verlag Lecture Notes Math, 1982, 949: 122~129

[74] Leung P F. A note on stable harmonic maps. J London Math Soc, 1984, 29: 380~384

[75] Lichnerowicz A. Applications harmonique et varieties Kahleriennes. Symp Math Ⅱ, Bologna, 1970, 341~402

[76] 陆启铿. 典型流形和典型域. 上海科学技术出版社, 1963

[77] Mazet E. La formulede la variation seconde de l' energie au voisinage d'une application harmonique. J Diff Geom, 1974, 8: 309~328

[78] Milnor J W and Stasheff J D. Charecteristic classes. Ann Math Studies 76, Princeton Univ Press Princeton N J 1974

[79] Montgomery D. Samelson H and Yang.C T Exeptional orbits of highest dimension.Ann Math, 1956, 64:131~141

[80] Mostow G D. Strong rigidity of locally symmetric spaces. Ann Math Studies, Princeton Univ Press, 1973, 78

[81] Nishikawa S. On maximal spacelike hypersurface in a Lorentzian manifold.Nagoya Math J, 1984, 95:117~124

[82] Ohnita Y. Stability of harmonic maps and standard minimal immersions.Tôhoku Math J, 1986, 38:259~267

[83] Okayasu T. Pinching and nonexistence of stable harmonic maps.Tôhoku Math J, 1988, 40:213~220

[84] Omori H.Isometric immersions of Riemannian manifolds. J Math Soc Japan, 1967, 19:205~241

[85] O,Neill B. The fundamental equations of a submersion. Michican Math J, 1966, 13:459~469

[86] Palais R S and Terng C L. Reduction of variables for minimal submanifolds.Proc A M S, 1986, 98(3):480~484

[87] Palmer B.The Gauss map of spacelike constant mean curvature hypersurface of Minkowski space. Comment Math Helv, 1990, 65:52~57

[88] Pan Yanglian.Some nonexistence theorems on stable harmonic mappings.Chinese Ann Math, 1982, 3:515~518

[89] Pan Y L. Nonexistence of stable harmonic maps from sufficiently pinched simply connected Riemannian manifolds. J London Math Soc, 1989, 39(2):568~576

[90] Pan Y L. Stable harmonic maps from pinched manifolds. Math Z, 1990, 203:493~501

[91] Pettinati V and Ratto A.Existence and nonexistence results for harmonic maps between spheres.Ann S N S Pisa Ser IV, 1990, 17:273~282

[92] Ratto A. Construction d'applications harmoniques de sphères euclidiennes.C R Acad Sci Paris I, 1987, 304:185~186

[93] Ruh E A. Curvature and differential structure of sphere. Comment Math Helv, 1971, 46:127~136

[94] Ruh E A and Vilms J. The tension field of the Gauss map. Trans A M S, 1970, 149: 569～573

[95] Sampson J H. Some properties and applications of harmonic mappings. Ann Scol Norm Sup, 1978, 11: 211～228

[96] Sampson J H. On harmonic mappings. Istituto Nazionale di Alta Math, Symp Math Monograf Bologna, 1982, XXVI: 197～210

[97] Schoen R. Analytic aspects of harmonic problem, Seminar on nonlinear partial differential equations ed-by Chern. S S Springer-Verlag Pub M S R I, 1984, 2: 321～358

[98] Schoen R. A remark on minimal hypercones. Proc Nat Acad Sci U.S.A., 1982, 79: 4523～4524

[99] Schoen R, Simon L and Yau S T. Curvature estimates for minimal hypersurfaces. Acta Math, 1975, 134: 275～288

[100] Schoen R and Uhlenbeck K. A regularity theory for harmonic maps. J Diff Geom, (1982, 1983), 17, 18: 307～335, 329

[101] Schoen R and Uhlenbeck K. Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps. J Diff Geom, 1983, 18: 253～268

[102] Schoen R and Uhlenbeck K. Regularity of minimizing harmonic maps into the sphere. Invent Math, 1984, 78: 89～100

[103] Schoen R and Yau S T. Harmonic maps and the topology of stable hypersurfaces and manifolds with nonnegative Ricci curvature. Comment Math Helv, 1976, 39: 333～341

[104] Schoen R and Yau S T. Existence of incompressibles minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature. Ann Math, 1979, 110: 127～142

[105] Sealey H C J. Harmonic maps of small energy. Bull London Math Soc V, 1981, 13(5): 405～408

[106] Sealey H C J. Some conditions ensuring the vanishing of harmonic differential forms with applications to harmonic

maps and Yang-Mills theory. Math Proc Camb Phil Soc, 1982, 91:441～452

[107] Siegel C L. Symplctic geometry. Amer J Math, 1943, 55: 1～86

[108] Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. Ann Math, 1968, 88:62～105

[109] Siu Y T. The complex-analytisity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds. Ann Math, 1980, 112:73～111

[110] SiuY T and Yau S T. Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature. Invent Math, 1980, 59:189～204

[111] Smith R T. The second variation formula for harmonic mappings. Proc A M S, 1975, 47:229～236

[112] Smith R T. Harmonic maps of spheres. Amer J Math, 1975, 97:364～385

[113] Spanier E H. Algebraic topology. McGraw-Hill, New York, 1966

[114] Sternberg S. Lectures on differential geometry. Prentice-Hall, Englwood Cliffs, N J, 1964

[115] Treibergs A E. Entire spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski 3-space Invent Math, 1982, 66: 39～56

[116] Uhlenbeck K. Harmonic maps:A direct method in the calculus of variations. Bull A M S, 1970, 76:1982～1987

[117] Urakawa H. Equivariant harmonic maps between compact manifolds of cohomogeneity one. Michican Math J, 1993, 40:27～51

[118] Wang Qiming. Isoparametric maps of Riemannian manifolds and their applications. Adv Sci China Math, 1988, 2: 79～103

[119] Wong Yung-Chow. Euclidean n-planes in pseudo-Euclidean spaces and differential geometry of Cartan domain. Bull A M S, 1969, 75:409～414

[120] Wu Chuan-Xi. Results of stable harmonic maps. Acta Math Sinica, 1990, 34(1): 27~32

[121] Wu Hung-Hsi. The Bochner technique in differential geometry. Math Report V3, Harwood Academic Publisher, 1988, 289~538

[122] 伍鸿熙，沈纯理和虞言林。黎曼几何初步。北京大学出版社，1989

[123] Xin Y L. Some results on stable harmonic maps. Duke Math J, 1980, 47: 609~613

[124] Xin Y L. Topology of certain submanifolds in the Euclidean sphere. Proc A M S, 1981, 82(4): 643~648

[125] Xin Y L. Some existence theorems of harmonic maps in Riemannian manifolds. Sci Sinica(A), 1982, 15(12): 1271~1278

[126] Xin Y L. Nonexistence and existence for harmonic maps in Riemannian manifolds, Proc. DD2, 1981. Science press, 1984, 529~538

[127] 忻元龙。一类调和映照的全纯性。数学学报，1985, 28(3): 382~386

[128] Xin Y L. An estimates for the image diameter and its application to submanifolds with parallel mean curvature. Acta Math Sci, 1985, 5(3): 305~308

[129] Xin Y L. Differential forms, conservation law and monotonicity formula. Sci Sinica (Ser A), 1986, XXIX(1): 40~50

[130] Xin Y L. Liouville type theorems and regularity of harmonic maps. Springer Verlag Lecture Notes Math, 1987, 1255: 198~208

[131] Xin Y L. Regularity of harmonic maps into certain homogeneous spaces. Springer-Verlag Lecture Notes Math, 1989, 1369: 295~305

[132] 忻元龙。锥和类锥调和映照。数学杂志，1989, 9(1): 87~92

[133] Xin Y L. On the Gauss image of a spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in Minkowski space. Comment Math Helv, 1991, 66: 590~598

[134] Xin Y L. Regularity of harmonic maps into positively curved manifolds. Chinese Ann Math, 1992, 13(B): 385～395

[135] Xin Y L. Riemannian submersion and equivariant harmonic maps. Proc Sympo Diff Geom in honor of Proffsor Su Buchin on his 90 birthday, World Sci Publ Co, 1993, 272～287

[136] Xin Y L. Equivariant harmonic maps into the sphere via isoparametric maps. Manuscripta Math, 1993, 79: 49～71

[137] Xin Y L. On harmonic representatives of $\Pi_{2m+1}(S^{2m+1})$. Math Z (to appear)

[138] Xin Y L. Harmonic maps of bounded symmetric domains. preprint

[139] Xin Y L. Heat flow of equivariant harmonic maps from B^3 into CP^2. preprint

[140] 忻元龙，陈威平．球面上具有相对仿射高斯映照的超曲面．数学学报，1985, 28(1): 131～139

[141] Xin Y L and yang Yihu. Regularity of p-harmonic maps into certain manifolds with positive sectional curvature. preprint

[142] Yau S T. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. Commun Pure Appl Math, 1975, 28: 201～228

[143] Yau S T. Some function theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry. Indiana Univ Math, J, 1976, 25: 659～670

[144] Yau S T. Seminar on differential geometry. Ann Math Study 102 Princeton Univ Press, 1982

[145] Zhang D. The existence of nonminimal regular harmonic maps from B^3 to S^2. Ann SNS Pisa Ser, 1989, Ⅳ16, 355～365

索　引

三　划

四　划

五　划

六　划

七 划

八 划

九 划

十 划

十 一 划

十二划

十四划

十 二 划

十 四 划